普通高等院校大学数学“十三五”规划教材

高等数学（同济第七版 下册）习题辅导书

主　编　常桂娟

副主编　曹秀梅　王述香　吴　伟　孙春薇　姜兆英

参　编　姜德民　孙宝山　赵　静　吴春妹

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

《高等数学（同济第七版 下册）》包括五章内容，因此《高等数学（同济第七版 下册）习题辅导书》相应地包含五章的习题及其解答，每章内容包括基本内容、基本要求和习题解答。此外，书中还提供历年考研部分试题及解答、《高等数学（下册）》期末考试试卷选编及参考答案。全书习题丰富，解答详细完整，图表清晰，是学好高等数学课程的首选练习册和优秀的考研指导书。

本书可作为大学工科学生高等数学课程的复习指导和练习册，也可作为考研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（同济第七版）习题辅导书. 下册/常桂娟主编. —北京：电子工业出版社，2015.7

ISBN 978-7-121-26305-7

I. ①高… II. ①常… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 127824 号

策划编辑：王羽佳
责任编辑：王羽佳　　　特约编辑：王　崧
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：16.75　字数：435 千字
版　　次：2015 年 7 月第 1 版
印　　次：2015 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

本书是与同济大学数学系编写的教材《高等数学（第七版）》相配套的辅导教材. 同济大学数学系编写的《高等数学》是本科生学习高等数学的经典之作。因此，本书也力求成为更适合大学生学习《高等数学》的指导书, 可作为报考硕士研究生入学考试的复习参考书, 还可为高等数学教师批改作业或备课提供参考.

为方便读者使用, 本书在内容上严格按照同济大学《高等数学(第七版)》的各章顺序对应编写, 其内容包括三篇.

第一篇是《高等数学（下册）》习题解答, 内容包括: ① 基本内容, 列出各章节的基本理论知识; ② 基本要求, 提出学生对各章节知识点需要掌握的程度; ③ 习题解答, 给出《高等数学（下册）》教材各章节习题、总习题的解答.

第二篇是历年考研部分试题及解答, 内容涵盖向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数, 给出了每道试题的年份及类别, 学生可以根据自己的具体情况进行选做.

第三篇是《高等数学（下册）》期末考试试卷选编及参考答案.

本书由青岛农业大学理学与信息科学学院数学教师编写. 其中, 第一篇内容的第 8 章由曹秀梅编写, 第 9 章由姜兆英、赵静编写, 第 10 章由王述香、孙春薇编写, 第 11 章由吴春妹编写, 第 12 章由吴伟、孙宝山编写. 第二篇历年考研部分试题及解答由姜德民编写; 第三篇及最终的统稿、定稿由常桂娟完成.

由于时间仓促, 在编写上难免会有错误, 敬请同行、专家、读者批评指正.

编　者

2015 年 4 月

目　　录

第一篇　《高等数学（下册）》习题解答

第二篇　历年考研部分试题及解答

第三篇　《高等数学（下册）》期末考试试卷选编及参考答案

第　一　篇

《高等数学（下册）》习题解答

第 8 章

空间解析几何与向量代数

一、基 本 内 容

1. 向量及其线性运算
   (1) 向量的相关概念: 向量、自由向量、向量相等、单位向量、零向量、向量的夹角、向量共线、向量共面、向量的模、向量的方向角、向量的方向余弦和向量在轴上的投影;
   (2) 空间直角坐标系的相关概念: 坐标轴、坐标面、卦限、向量的坐标、点的坐标和向径;
   (3) 向量的线性运算: 向量的加减法、向量与数的乘法及运算规律.
2. 数量积、向量积和*混合积
   (1) 数量积的定义、性质、运算规律、坐标表示式;
   (2) 向量积的定义、性质、运算规律、坐标表示式、几何意义;
   (3) 混合积的定义、性质、运算规律、坐标表示式、几何意义.
3. 平面及其方程
   (1) 曲面与空间曲线的概念;
   (2) 平面的点法式方程、一般方程和截距式方程;
   (3) 两平面的夹角和点到平面的距离的计算公式.
4. 空间直线及其方程
   (1) 空间直线的一般方程、对称式方程（即点向式方程）和参数方程;
   (2) 两直线的夹角和直线与平面的夹角的计算公式.
5. 曲面及其方程
   (1) 旋转曲面、母线和轴的概念;
   (2) 柱面、准线和母线的概念;
   (3) 九类特殊二次曲面：椭圆锥面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面、椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面的标准方程与图形.
6. 空间曲线及其方程
   (1) 空间曲线的一般方程;
   (2) 空间曲线的参数方程和*曲面的参数方程;
   (3) 空间曲线在坐标面上的投影.

二、基 本 要 求

1. 掌握向量的相关概念和空间直角坐标系的相关概念; 能够熟练利用坐标计算向量的模、方向角、方向余弦、向量在轴上的投影及向量的线性运算.

2. 掌握数量积和向量积的概念与性质；能够熟练利用坐标计算数量积和向量积；了解混合积的计算公式.
3. 熟练掌握平面的点法式方程和一般式方程的表示形式与求法；牢记两平面的夹角和点到平面的距离的计算公式.
4. 熟练掌握空间直线的一般方程、对称式方程（即点向式方程）和参数方程的表示形式、相互转化方法及求法；牢记两直线的夹角和直线与平面的夹角的计算公式.
5. 掌握九类特殊二次曲面的方程与图形；会求坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转后所得到的旋转曲面的方程.
6. 了解空间曲线的一般方程与参数方程的表示形式；会求空间曲线在坐标面上的投影.

三、习 题 解 答

习题 8-1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证明　作四边形 $ABCD$ 如图 8-1 所示，假设已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$，

则有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 平行且相等，从而四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

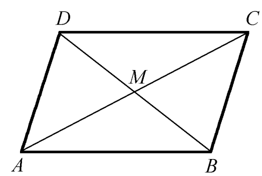


图 8-1

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

解
$$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$$
$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$$
$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$$
$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_4B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2);$$
$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4).$$

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为 $\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right)$.

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限.

$$A(1,-2,3);B(2,3,-4);C(2,-3,-4);D(-2,-3,1).$$

解 A 在第四卦限; B 在第五卦限; C 在第八卦限; D 在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置.

$$A(3,4,0);B(0,4,3);C(3,0,0);D(0,-1,0).$$

解 在 xOy 面上点的竖坐标为零; 在 yOz 面上点的横坐标为零; 在 zOx 面上点的纵坐标为零; 在 x 轴上点的纵、竖坐标均为零; 在 y 轴上点的横、竖坐标均为零; 在 z 轴上点的横、纵坐标均为零.

A 在 xOy 面上; B 在 yOz 面上; C 在 x 轴上; D 在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面; (2)各坐标轴; (3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 关于 xOy 面、yOz 面、zOx 面的对称点分别为 $(a,b,-c)$、$(-a,b,c)$、$(a,-b,c)$;

(2) 关于 x 轴、y 轴、z 轴的对称点分别为 $(a,-b,-c)$、$(-a,b,-c)$、$(-a,-b,c)$;

(3) 关于坐标原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 P_0 在 xOy 面、yOz 面、zOx 面的垂足坐标分别为 $(x_0,y_0,0)$、$(0,y_0,z_0)$、$(x_0,0,z_0)$; P_0 在 x 轴、y 轴、z 轴上的垂足坐标分别为 $(x_0,0,0)$、$(0,y_0,0)$、$(0,0,z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于 z 轴的直线上的所有点的横坐标均为 x_0, 纵坐标均为 y_0; 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于 xOy 面的平面上的所有点的竖坐标均为 z_0.

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

解 根据题意作图 8-2, 则各顶点坐标分别为

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),\ B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),$$

$$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),\ D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),\ E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),$$

$$F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right),\ G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),\ H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right).$$

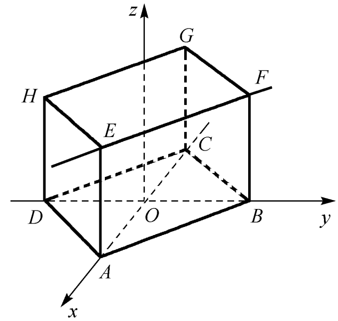


图 8-2

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 $M(4,-3,5)$ 到 x 轴的距离为 $d_x=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$；到 y 轴的距离为 $d_y=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$；到 z 轴的距离为 $d_z=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解 根据题意设所求点为 $P(0,y,z)$，由 $|PA|=|PB|=|PC|$ 得

$$\begin{cases}\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}\\ \sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}\end{cases}$$

解得 $y=1,z=-2$. 故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 因为

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$$
$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$$
$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$$

所以 $|AB|=|AC|$ 且 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，

所以模为 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$；

方向余弦分别为 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$；

方向角分别为 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi,\beta=\dfrac{3}{4}\pi,\gamma=\dfrac{1}{3}\pi$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 当 $\cos\alpha=0$ 时，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，此时向量与 x 轴垂直，与 yOz 面平行;

(2) 当 $\cos\beta=1$ 时，即 $\beta=0$，此时向量与 y 轴同向，与 zOx 面垂直;

(3) 当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时，即 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$，此时向量与 xOy 面垂直，与 z 轴平行.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 $(\boldsymbol{r})_u=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4 和 7. 求该向量的起点 A 的坐标.

解　设 A 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$，
由题知 $2-x=4,\ -1-y=-4,\ 7-z=7$，即 $x=-2,y=3,z=0$，
故 A 的坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$．求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解　$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$，
故 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8-2

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求:
(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=(5,1,7)；$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(-6)\times3=-18$，
$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$；

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，
即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$．求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解　由题知 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，

则 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4)$，

故所求向量为 $\pm\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}\right|}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{17}},\dfrac{-2}{\sqrt{17}},\dfrac{-2}{\sqrt{17}}\right)$.

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所作的功（长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向）.

解　由题知 $\boldsymbol{F}=(0,0,-980)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)$，
所作的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5880\ (\text{J})$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在 O

的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着（见图 8-3）. 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

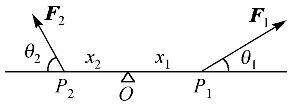


图 8-3

解 有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和等于零.
又根据对力矩正负号的规定可得杠杆保持平衡的条件为 $|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1-|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2=0$，即 $|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2$.

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2$.

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$，
记 z 上的一个单位向量 $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$，要使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，只需 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 垂直，
即 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}=0$，代入坐标得 $-2\lambda+4\mu=0$，故当 $\lambda=2\mu$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 设圆心为 O，直径为 AB，C 为圆周上任取点（除点 A、B 外），则要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，
只需 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
而 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}$

$$=-\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AO}+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0,$$

故直径所对圆周角为直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算:
(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=[2\cdot1+(-3)\cdot(-1)+1\cdot3](1,-2,0)-[2\cdot1+(-3)\cdot(-2)+1\cdot0](1,-1,3)$
$=(0,-8,-24)$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(3,-4,4)\times(2,-3,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)$；

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=(-8,-5,1)$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-8,-5,1)\cdot(1,-2,0)=2$.

10. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

***11.** 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，试利用行列式的性质证明:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

同理可知$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，故$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$.

12. 试用向量证明不等式$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$，其中$a_1$、$a_2$、$a_3$、$b_1$、$b_2$、$b_3$为任意实数，并指出等号成立的条件.

证明 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

因为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$

且
$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

故
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|.$$

其中当$\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right|=1$，即$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，也就是$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时，等号成立.

习题 8-3

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

解 由题知，所求平面的法向量为$(3,-7,5)$，平面又过点$(3,0,-1)$，
故所求平面方程为$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0$，即$3x-7y+5z-4=0$.

2. 求过点$M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点M_0的线段OM_0垂直的平面方程.

解 由题知，平面的法向量为$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$，平面又过点$M_0(2,9,-6)$，故所求平面方程为$2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0$，即$2x+9y-6z-121=0$.

3. 求过$M_1(1,1,-1)$、$M_2(-2,-2,2)$和$M_3(1,-1,2)$三点的平面方程.

解 平面的一个法向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-3,9,6)$$

故所求平面方程为$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$，即$x-3y-2z=0$.

4. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面.

(1) $x=0$； (2) $3y-1=0$； (3) $2x-3y-6=0$； (4) $x-\sqrt{3}y=0$；
(5) $y+z=1$； (6) $x-2z=0$； (7) $6x+5y-z=0$.

解 (1) $x=0$为yOz面，如图8-4(1)所示；

(2) $3y-1=0$表示过点$(0,\dfrac{1}{3},0)$且平行于zOx面的平面，如图8-4(2)所示；

(3) $2x-3y-6=0$表示平行于z轴的平面，如图8-4(3)所示；

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面，如图 8-4(4)所示；

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面，如图 8-4(5)所示；

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面，如图 8-4(6)所示；

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面，如图 8-4(7)所示.

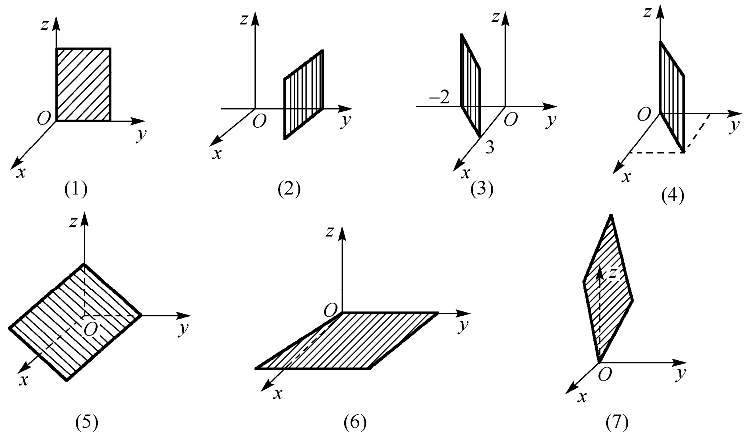


图 8-4

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解 设平面与 xOy 面、yOz 面和 zOx 面的夹角分别为 θ_1、θ_2 和 θ_3，记平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，xOy 面、yOz 面和 zOx 面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$、$\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$ 和 $\boldsymbol{n}_3=(0,1,0)$，则

$$\cos\theta_1=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}=\frac{|2\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

同理有 $\cos\theta_2=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{3}$，$\cos\theta_3=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_3|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_3|}=-\dfrac{2}{3}$.

6. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，试求该平面方程.

解 所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

故所求平面方程为 $1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$，即 $x+y-3z-4=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1, 2x-y-z=0, -x+2y+2z=3$ 的交点.

解 联立方程组 $\begin{cases}x+3y+z=1\\ 2x-y-z=0\\ -x+2y+2z=3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=3\end{cases}$，故三平面的交点为 $(1,-1,3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程.

(1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$；
(2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$；
(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

解 (1) 设所求平面方程为 $By+D=0$，将点 $(2,-5,3)$ 代入方程得 $D=5B$，故所求平面方程为 $By+5B=0$，即 $y+5=0$.

(2) 设所求平面方程为 $Ax+By=0$，将点 $(-3,1,-2)$ 代入方程得 $B=3A$，故所求平面方程为 $Ax+3Ay=0$，即 $x+3y=0$.

(3) 设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$，将点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 分别代入方程得

$$\begin{cases}-2C+D=0\\ B+7C+D=0\end{cases}，解得\begin{cases}D=2C\\ B=-9C\end{cases}.$$

故所求平面方程为 $-9Cy+Cz+2C=0$，即 $9y-z-2=0$.

9. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解 距离 $d=\dfrac{|1+2\cdot 2+2\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$.

习题 8-4

1. 求过点 $(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{5}$ 的直线方程.

解 由题知，所求直线的方向向量为 $(2,1,5)$，直线过点 $(4,-1,3)$，故所求直线方程为 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

解 由题知，直线的方向向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0+2,2-1)=(-4,2,1)$，故所求直线方程为 $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

注：由于取直线上的点不同，所得直线的对称式方程表达式也不同.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\ 2x+y+z=4.\end{cases}$$

解 由题知，直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,-1,1)\times(2,1,1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

令 $x=1$ 代入直线的一般方程，解得 $y=z=1$.

故直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$，参数方程为 $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+t\\ z=1+3t\end{cases}$.

4. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解 由题知, 平面的法向量为直线的方向向量, 即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面的方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$, 即 $16x-14y-11z-65=0$.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 的夹角的余弦.

解 两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=(5,-3,3)\times(3,-2,1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,4,-1),$$

$$\boldsymbol{s}_2=(2,2,-1)\times(3,8,1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(10,-5,10),$$

故两直线夹角的余弦 $\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})=\dfrac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{|3\cdot10-4\cdot5-1\cdot10|}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0$.

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证明 两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,1,5),\quad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3(3,1,5),$$

显然 $\boldsymbol{s}_2=-3\boldsymbol{s}_1$, 故两直线必平行.

7. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 要使所求直线与两平面都平行, 则所求直线的方向向量与两平面的法向量都垂直, 即

$$\boldsymbol{s}=(1,0,2)\times(0,1,3)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

故所求直线的方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

8. 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

解 由题知, 平面过两点 $A(3,1,-2)$ 和 $B(4,-3,0)$, 且平面的法向量与向量 $\overrightarrow{AB}=(1,-4,2)$ 和

$\boldsymbol{s}=(5,2,1)$ 都垂直，则平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -4 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-8,9,22),$$

故所求平面方程为 $-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0$，即 $8x-9y-22z-59=0$.

9. 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=(2,4,-2)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，则

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\cdot1+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0,$$

故直线与平面的夹角为 0.

10. 试确定下列各组中的直线与平面间的关系.

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

解 (1) 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$，则 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\cdot4+(-7)\cdot(-2)+3\cdot(-2)=0$，即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$.

将直线上的点 $(-3,-4,0)$ 代入平面方程不成立，故直线与平面是平行的.

(2) 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3,-2,-7)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$，则 $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}$，即直线与平面垂直.

(3) 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，则 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=3\cdot1+1\cdot1+(-2)\cdot1=0$，即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$.

将直线上的点 $(2,-2,3)$ 代入平面方程成立，故直线在平面内.

11. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\ x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+z=0,\\ x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),\qquad \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

又因为平面的法向量与两方向向量都垂直，所以 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1)$，

故平面方程为 $-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0$，即 $x-y+z=0$.

12. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 由题知，过点 $(-1,2,0)$ 且与已知平面垂直的直线方程为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$，直线与平面的交点即为所求的投影，所以将直线与平面方程联立方程组，解得 $x=-\dfrac{5}{3}$， $y=z=\dfrac{2}{3}$. 故所求的投影坐标为 $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-3,-3)$，则过点 $P(3,-1,2)$ 且与直线垂直的平面方程为 $-3(y+1)-3(z-2)=0$，即 $y+z-1=0$.

将直线与平面方程联立方程组，解得 $x=1,y=-\dfrac{1}{2},z=\dfrac{3}{2}$，即为直线与平面的交点.

故点到直线的距离为 $d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

14. 设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，试证：点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

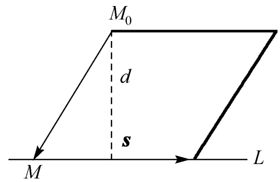


图 8-5

证明 以 $|\overrightarrow{M_0M}|$ 和 $|\boldsymbol{s}|$ 为邻边作平行四边形如图 8-5 所示，一方面由平行四边形的面积公式知 $A=|\boldsymbol{s}|\cdot d$，另一方面由向量积的几何意义知平行四边形的面积为 $A=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$，所以 $|\boldsymbol{s}|\cdot d=|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$，即 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

15. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

解 过直线的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

即 $$(2+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0,$$ 其中 λ 为待定常数.

该平面与已知平面垂直的条件是 $(2+3\lambda)\cdot4-(4+\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot1=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{13}{11}$，将其代入平面束方程可得投影平面方程为 $17x+31y-37z-117=0$.

故所求的投影直线的方程为

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形.

(1) $x=0,y=0,z=0,x=2,y=1,3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0,z=0,x=1,y=2,z=\dfrac{y}{4}$.

解 如图 8-6(1)和图 8-6(2)所示。

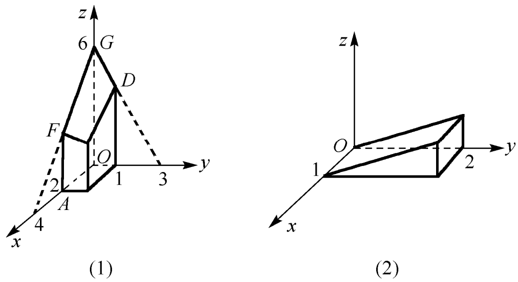


图 8-6

习题 8-5

1. 一球面过原点及 $A(4,0,0)$、$B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$ 三点，求球面的方程及球心的坐标和半径.

解 由题知，设球面方程为

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz=0,$$

分别将点 A、B 和 C 的坐标代入上述方程得 $\begin{cases}16A+4D=0\\A+9A+D+3E=0\\16A-4F=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-4A\\E=-2A\\F=4A\end{cases}$，故所求球面方程为 $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$，整理得 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$，即球心坐标为 $(2,1,-2)$，半径为 3.

2. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心且通过坐标原点的球面方程.

解 由题知，球半径为 $\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$，故所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$，即 $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解 原方程可整理为 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$，
所以方程表示的是以 $(1,-2,-1)$ 为球心、以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程，它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为 (x,y,z)，由题知

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2$，即动点形成的轨迹是以$\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$为球心、以$\frac{2}{3}\sqrt{29}$为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解　将 xOz 坐标面上的曲线 $f(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转一周时, 只需将方程 $f(x,z)=0$ 中的 z 改成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，即为所求旋转曲面的方程.

由上知, 所求旋转曲面方程为 $(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x$, 化简为 $y^2+z^2=5x$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解　将方程中的 x 改为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得 $(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9$,

即 $x^2+y^2+z^2=9$ 为所求旋转曲面方程.

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解　双曲线绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2-9y^2-9z^2=36$, 双曲线绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2+4z^2-9y^2=36$.

8. 画出下列各方程所表示的曲面.

(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$;　　(2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;　　(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

(4) $y^2-z=0$;　　(5) $z=2-x^2$.

解　如图 8-7(1)至图 8-7(5)所示。

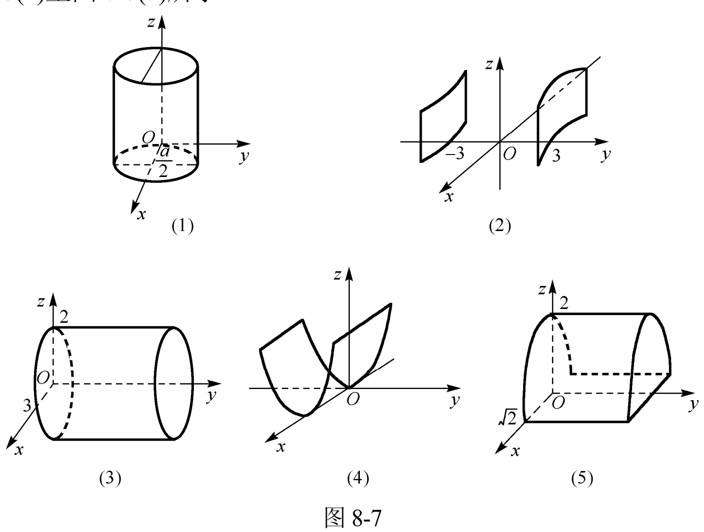


图 8-7

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形.

(1) $x=2$;　(2) $y=x+1$;　(3) $x^2+y^2=4$;　(4) $x^2-y^2=1$.

解　(1) $x=2$ 在平面解析几何中表示过 $(2,0)$ 点且平行于 y 轴的一条直线; 在空间解析几何中表示过 $(2,0,0)$ 点且平行与 yOz 面的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示过 $(-1,0)$ 点且斜率为 1 的一条直线; 在空间解析几何中表示一个平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示以原点为圆心、以 2 为半径的圆周; 在空间解析几何中表示以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=4$ 为准线, 母线平行于 z 轴的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴、以 y 轴为虚轴的双曲线; 在空间解析几何中表示以 xOy 面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 为准线, 母线平行于 z 轴的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$;　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2-y^2-z^2=1$;　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

解　(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 可视为由 xOy 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转椭球面; 或者也可视为由 xOz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转椭球面.

(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 可视为由 xOy 面上的双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的单叶旋转双曲面; 或者也可视为由 yOz 面上的双曲线 $z^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而形成的单叶旋转双曲面.

(3) $x^2-y^2-z^2=1$ 可视为由 xOy 面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的双叶旋转双曲面; 或者也可视为由 xOz 面上的双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的双叶旋转双曲面.

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$ 可视为由 xOz 面上的两条直线 $z-a=\pm x$ 绕 z 轴旋转一周而形成的圆锥面; 或者也可视为由 yOz 面上的两条直线 $z-a=\pm y$ 绕 z 轴旋转一周而形成的圆锥面.

11. 画出下列方程所表示的曲面.

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$;　(2) $x^2-y^2-4z^2=4$;　(3) $\dfrac{z}{3}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$.

解　(1) 单叶双曲面, 参考主教材中的图 8-40.

(2) 双叶双曲面, 参考主教材中的图 8-41.

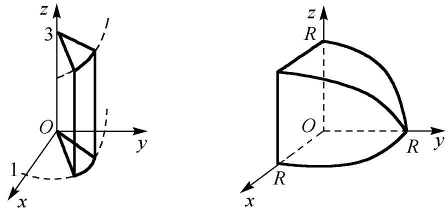
(3) 椭圆抛物面, 参考主教材中的图 8-50.

12. 画出下列各曲面所围立体的图形.

(1) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$（在第一卦限内）;

(2) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$（在第一卦限内）.

解 如图 8-8(1)和图 8-8(2)所示.



(1) (2)

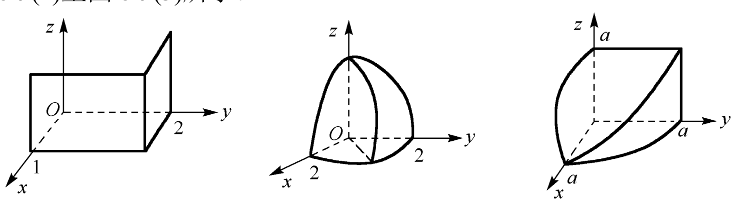
图 8-8

习题 8-6

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形.

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

解 如图 8-9(1)至图 8-9(3)所示。



(1) (2) (3)

图 8-9

2. 指出下列方程组在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形.

(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

解 (1) 方程组在平面解析几何中表示两直线的交点；在空间解析几何中表示两平面的交线.

(2) 方程组在平面解析几何中表示椭圆与其一条切线的交点 $(0,3)$；在空间解析几何中表示椭圆柱面与其切平面的交线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解 方程组消去 x 得 $3y^2-z^2=16$，即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

同理，方程组消去 y 得 $3x^2+2z^2=16$，即为母线平行于 y 且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 将两方程联立方程组后消去 z 得 $2x^2-2x+y^2=8$，此为球面与平面的交线关于 xOy 的投影柱面，则所求投影曲线的方程为 $\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}$.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

解 (1) 把 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得 $2x^2+z^2=9$，即 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{z^2}{3^2}=1$.

令 $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，则 $z=3\sin t$，从而该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t \qquad t\in[0,2\pi]. \\ z=3\sin t \end{cases}$$

(2) 把 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得 $(x-1)^2+y^2=3$，令 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，从而该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos t \\ y=\sqrt{3}\sin t \qquad t\in[0,2\pi]. \\ z=0 \end{cases}$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 方程组前两个方程联立消去 θ 得 $x^2+y^2=a^2$，即为螺旋线关于 xOy 面的投影柱面，所以螺旋线在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$.

方程组中第一个与第三个方程联立消去 θ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$，即为螺旋线关于 zOx 面的投影柱面，所以螺旋线在 zOx 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b} \\ x=0 \end{cases}$.

方程组中第二个与第三个方程联立消去 θ 得 $y=a\cos\dfrac{z}{b}$，即为螺旋线关于 yOz 面的投影柱面，所以螺旋线在 yOz 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} y=a\cos\dfrac{z}{b} \\ x=0 \end{cases}$.

7. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解　如图 8-10 所示，上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=ax\\z=0\end{cases}$，结合图形可知两立体的公共部分在 xOy 面上的投影恰为该投影曲线的内部，即圆面 $x^2+y^2\leqslant ax$.

上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 在 zOx 面上的投影曲线为 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-ax}\\y=0\end{cases}$，结合图形可知，两立体的公共部分在 zOx 面上的投影为由 x 轴、z 轴和曲线 $z=\sqrt{a^2-ax}$ 所围的区域.

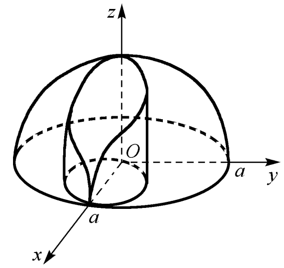


图 8-10

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三个坐标面上的投影.

解　曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4\\z=0\end{cases}$，而所求旋转抛物面在 xOy 面上的投影恰为该曲线内部，即 $x^2+y^2\leqslant 4$.

曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 与平面 $y=0$ 的交线在 zOx 面上的投影曲线为 $\begin{cases}z=x^2\\y=0\end{cases}$，其中 $0\leqslant z\leqslant 4$，而所求旋转抛物面在 zOx 面上的投影为该曲线内部，即 $x^2\leqslant z\leqslant 4$. 同理，旋转抛物面在 yOz 面上的投影为 $y^2\leqslant z\leqslant 4$.

总 习 题 八

1. 填空

(1) 设在坐标系 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0,y_0,z_0) 和 (x,y,z)，则在 $[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系中，点 M 的坐标为________，向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为________.

(2) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为 0，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量是________的.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________.

(4) 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4,|\boldsymbol{c}|=5$，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解　(1) 根据坐标系的平移知，M 的坐标为 $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标为 (x,y,z).

(2) 由于 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0$，所以 $[(\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=0$，从而得 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，故三向量是共面的.

(3) 由题知 $\boldsymbol{c}=(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)$，又因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，
即 $2\cdot(4-2\lambda)+1\cdot(-1-\lambda)+2\cdot(10-2\lambda)=0$，解得 $\lambda=3$.

(4) 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$ 得 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

又因为 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4,|\boldsymbol{c}|=5$，所以 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$，即以 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$、$|\boldsymbol{c}|$ 为边的三角形是直角三角形，故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=36$.

2. 下列两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论.

(1) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4, \end{cases}$ 则 L 的参数方程为（　　）；

A. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-1+t, \\ z=1+3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1-t, \\ z=1+3t \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x=1-2t, \\ y=-1-t, \\ z=1+3t \end{cases}$

(2) 下列结论中, 错误的是（　　）.

A. $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

B. $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

C. $x^2+2y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

D. $y^2=5x$ 表示抛物柱面

解　(1) L 的方向向量为 $(1,-1,1)\times(2,1,1)=(-2,13)$, 排除 C、D, 再分别将 A 中的点 $(1,1,1)$ 和 B 中的点 $(1,-1,1)$ 代入直线 L 方程, 满足方程的即为正确答案, 故选 A.

(2) 选项 B 为单叶双曲面, 故选 B.

3. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解　设所求点为 $P(0,y,0)$, 由题知 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$, 即 $\sqrt{1^2+(-3-y)^2+7^2}=\sqrt{5^2+(7-y)^2+(-5)^2}$, 解得 $y=2$. 故所求点为 $(0,2,0)$.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$ 和 $C(-1,1,2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

解　由题知, 线段 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{3+5}{2},\frac{2-4}{2},\frac{-1+7}{2}\right)$, 即 $(4,-1,3)$, 故所求中线长度为 $\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}$.

5. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 三边中点依次为 D、E、F, 试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$, 并证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

证明　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, 同理有 $\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

从而 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)+\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)+\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.

6. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

证明　设 $\triangle ABC$ 中, D 和 E 分别为边 AB 和 AC 的中点, 则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

即 $\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$, 得证.

7. 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，求$z$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-4,8+z),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,-6,8-z)$，由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$得

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2}$$

解得$z=1$.

8. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},|\boldsymbol{b}|=1,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角.

解 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=3+1+2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=7$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=3+1-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=1$，

从而 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{\sqrt{7}\cdot 1}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

故所求两向量的夹角为$\arccos\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

9. 设$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 由$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$得$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0$； ①

由$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$得$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0$. ②

将上面两式相减得$46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-23|\boldsymbol{b}|^2=0$，即$|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. ③

再将③式代入①式可得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 故$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$，即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

10. 设$\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问z为何值时$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$最小？并求出此最小值.

解 记$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$. 因为

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot z}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+z^2}}=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$，所以$\theta=\arccos\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$.

而 $$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-2z)^2}{9(2+z^2)}}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2+z^2}-(1-2z)\dfrac{2z}{2\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2}=\frac{z+4}{(2+z^2)\sqrt{5z^2+4z+17}},$$

显然，当$z<-4$时，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}<0$，函数单调递减；当$z>-4$时，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}>0$，函数单调递增.

故当$z=-4$时，夹角θ取到最小值$\theta_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

11. 设$|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=3,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$为边的平行四边形面积.

解 平行四边形的面积

$$S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$

$$=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=5\cdot4\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=30.$$

12. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3),\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$.

解　设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ 可得 $2x-3y+a=0$　①，　$x-2y+3z=0$　②.

又由 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14$ 可得 $2x+y+2z=42$　③.

将上面的式①、式②和式③联立方程组，解得 $x=14,y=10,z=2$. 故所求 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

13. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2),\boldsymbol{b}=(2,-3,-4),\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$，证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证明　因为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-1&3&2\\2&-3&-4\\-3&12&6\end{vmatrix}=0$，

所以三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面. 设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则

$$(-3,12,6)=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)=(-\lambda+2\mu,3\lambda-3\mu,2\lambda-4\mu)$$

从而有 $\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3\\3\lambda-3\mu=12\\2\lambda-4\mu=6\end{cases}$，解得 $\lambda=5,\mu=1$. 故 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

14. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹方程.

解　由题知

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

化简整理得 $(x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$.

15. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴.

(1) $z=2(x^2+y^2)$；(2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$；　(3) $z^2=3(x^2+y^2)$；　(4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

解　(1) 母线 $\begin{cases}z=2x^2\\y=0\end{cases}$，旋转轴为 z 轴;

(2) 母线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=0\\z=0\end{cases}$，旋转轴为 y 轴;

(3) 母线 $\begin{cases}z=\sqrt{3}x\\y=0\end{cases}$，旋转轴为 z 轴;

(4) 母线 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\\z=0\end{cases}$，旋转轴为 x 轴.

16. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 由题知, 可设平面方程为 $A(x-3)+By+Cz=0$,

平面过点 $B(0,0,1)$, 可得 $-3A+C=0$, ①

平面与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 可得 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(A,B,C)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{1^2}}=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{2}$,

整理得 $A^2+B^2-3C^2=0$, ②

由式①和式②联立方程组, 解得 $B=\pm\sqrt{26}A, C=3A$.

故所求平面方程为 $(x-3)\pm\sqrt{26}y+3z=0$.

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$, 并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线, 求此平面方程.

解 因为直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-1,-1)$.

所以过点 $(1,-1,1)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$ 为法向量的平面为 $-1\cdot(y+1)-(z-1)=0$, 即 $y+z=0$, 联立方程组 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\\y+z=0\end{cases}$, 解得 $x=0, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$, 即垂足为 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

由于所求平面垂直于平面 $z=0$, 故设所求平面方程为 $Ax+By+D=0$.

又知所求平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 故有 $\begin{cases}A-B+D=0\\-\frac{1}{2}B+D=0\end{cases}$, 解得 $B=2D, A=D$.

从而所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$, 即 $x+2y+1=0$.

18. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 设 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}=t$, 则已知直线与所求直线的交点可记为 $(t-1,t+3,2t)$, 从而所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(t,t+3,2t-4)$.

又由所求直线与已知平面平行, 可得 $3t-4(t+3)+(2t-4)=0$, 解得 $t=16$.

故所求直线方程为 $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

19. 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$, 试在 z 轴上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

解 设点 $C(0,0,z)$, 则所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\-1 & 2 & 1\\-1 & 0 & z\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}.$$

由于 $\sqrt{5z^2-2z+5}=\sqrt{5\left(z-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{24}{5}}$, 所以 $z=\frac{1}{5}$, 即 $C(0,0,\frac{1}{5})$ 时, $S_{\min}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

20. 求曲线$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 方程组消去 z，得 $x^2 + y^2 - x - y = 0$，故已知曲线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 x，得 $2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0$，故已知曲线在 yOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2y^2 + 2yz + z^2 - 4y - 3z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 y，得 $2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0$，故已知曲线在 xOz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} 2x^2 + 2xz + z^2 - 4x - 3z + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

21. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 将两曲面方程联立方程组后消去 z，得 $x^2 + y^2 - 2x = 0$，故立体在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

同理，方程组消去 x 后，得 $\left(\dfrac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 = 1$，结合图 8-11 知立体在 yOz 面上的投影为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leqslant 1, z \geqslant 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

方程组消去 y 后，得 $z^2 = 2x$，结合图 8-11 知立体在 xOz 面上的投影为$\begin{cases} x \leqslant z \leqslant \sqrt{2x} \\ y = 0 \end{cases}$.

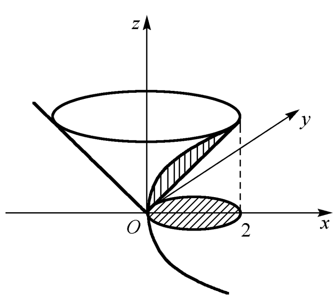


图 8-11

22. 画出下列各曲面所围立体的图形.

(1) 抛物柱面 $2y^2 = x$，平面 $z = 0$ 及 $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$；

(2) 抛物柱面 $x^2 = 1 - z$，平面 $y = 0, z = 0$ 及 $x + y = 1$；

(3) 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$；

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$，柱面 $y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 如图 8-12(1)至图 8-12(4)所示。

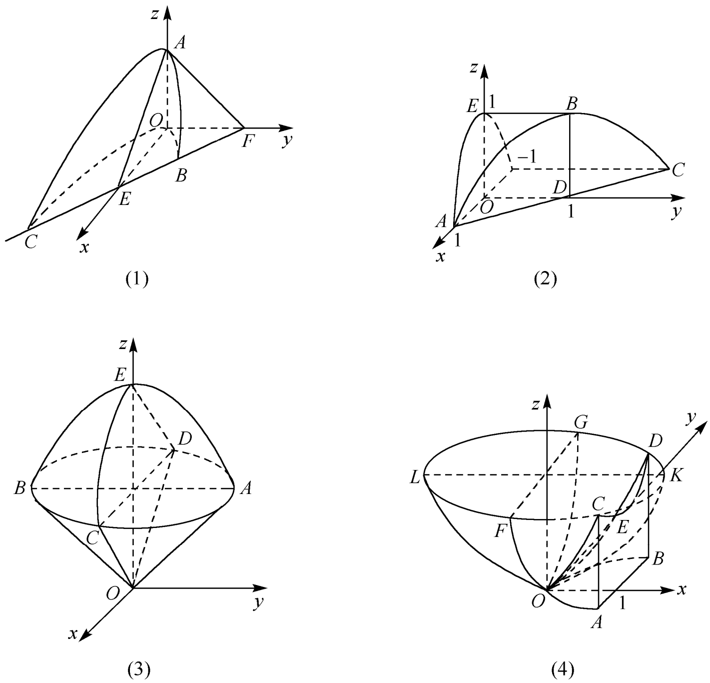


图 8-12

第 9 章

多元函数微分法及其应用

一、基 本 内 容

1. 多元函数的基本概念
   (1) 平面点集, *n 维空间;
   (2) 多元函数的概念;
   (3) 多元函数的极限;
   (4) 多元函数的连续性.
2. 偏导数
   (1) 偏导数的定义及其计算法;
   (2) 高阶偏导数.
3. 全微分
   (1) 全微分的定义;
   *(2) 全微分在近似计算中的应用.
4. 多元复合函数的求导法则
   (1) 一元函数与多元函数复合的情形;
   (2) 多元函数与多元函数复合的情形;
   (3) 其他情形, 全微分形式不变性.
5. 隐函数的求导公式
   (1) 一个方程的情形: 隐函数存在定理 1、隐函数存在定理 2;
   (2) 方程组的情形: 隐函数存在定理 3.
6. 多元函数微分学的几何应用
   (1) 一元向量值函数及其导数;
   (2) 空间曲线的切线与法平面;
   (3) 曲面的切平面与法线.
7. 方向导数与梯度
   (1) 方向导数;
   (2) 梯度.
8. 多元函数的极值及其求法
   (1) 多元函数的极值及最大值与最小值;
   (2) 条件极值, 拉格朗日乘数法.

*9. 二元函数的泰勒公式

(1) 二元函数的泰勒公式;

(2) 极值充分条件的证明.

*10. 最小二乘法

二、基本要求

1. 理解多元函数的概念和二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 掌握多元复合函数偏导数的求法.
5. 会求隐函数（包括由方程组确定的隐函数）的偏导数.
6. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程.
7. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数的极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值.
10. 了解多元函数最大值和最小值的概念, 并会解决一些简单的应用问题.

三、习题解答

习题 9-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集, 并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}$;　　(2) $\{(x,y)|1<x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y)|y>x^2\}$;　　(4) $\{(x,y)|x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)|x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解　(1) 此集合是开集, 无界集; 导集为 R^2, 边界为 $\{(x,y)|x=0\text{或}y=0\}$.

(2) 此集合既非开集也非闭集, 是有界集; 导集为 $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$, 边界为 $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$.

(3) 此集合是开集, 区域, 无界集; 导集为 $\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$, 边界为 $\{(x,y)|y=x^2\}$.

(4) 此集合为闭集, 有界集; 导集为集合本身, 边界为

$$\{(x,y)|x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)|x^2+(y-2)^2=4\}.$$

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$, 试求 $f(tx,ty)$.

解　$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\dfrac{tx}{ty}=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证明 $F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)\cdot(\ln u+\ln v)$

$$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$$

$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{x+y+x-y}=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域.

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\,(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

注：求多元函数的定义域与求一元函数的定义域相类似，就是先求出构成该函数的各个简单函数的定义域，然后再求出它们的交集，即为所求的定义域.

解 (1) $\{(x,y)\,|\,y^2-2x+1>0\}$.

(2) $\{(x,y)\,|\,x+y>0,x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y)\,|\,y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$.

(5) $\{(x,y,z)\,|\,r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\geqslant z^2,x^2+y^2\neq 0\}$.

6. 求下列各极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{xy}}-1}$；　(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{1}=\ln 2.$

注：上述两小题是利用多元初等函数在其定义域是连续的这个性质来求极限的，即函数在该点

的极限值等于函数在该点的函数值.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}.$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{1-\mathrm{e}^{xy}}(\sqrt{2-\mathrm{e}^{xy}}+1)=-1\cdot 2=-2.$

注: 此题先运用了分母有理化, 然后又利用了当$(x,y)\to(0,0)$时, $\mathrm{e}^{xy}-1\sim xy$.

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2.$

注: 本题利用了当$(x,y)\to(2,0)$时, $\tan(xy)\sim xy$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot 0=0.$

注: 本题利用了当$(x,y)\to(0,0)$时, $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2$.

***7**. 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

注: 证明极限$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$不存在常用的方法有: (1) 找两条不同的路径, 使得点P沿着这两条路径趋于P_0时, $f(P)$的极限存在但不相等; (2) 找一条特殊的路径, 使得点P沿着这条路径趋于P_0时, $f(P)$的极限不存在. 本题采用第一种方法.

解　(1) 当点(x,y)沿直线$y=\dfrac{1}{2}x, y=2x$这两条路径趋于$(0,0)$时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\frac{1}{2}x}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{2}x}{x-\frac{1}{2}x}=3,\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-2x}=-3.$$

故所求极限不存在.

(2) 当点(x,y)沿直线$y=x, y=-x$这两条路径趋于$(0,0)$时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+0}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

故所求极限不存在.

8. 函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的?

解　这个函数的定义域是$\{(x,y)\,|\,y^2-2x\neq 0\}$, 也就是函数在曲线$y^2=2x$上没有定义, 因此曲线$y^2=2x$上的各点均为函数的间断点.

***9**. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$.

因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$，

所以取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

***10**. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续. 证明：对任意 $y_0\in\mathrm{R}, F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证明 取点 $P_0(x_0,y_0)\in\mathrm{R}^2$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 所以当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，有 $|x-x_0|<\rho(P,P_0)<\delta$，从而有 $|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题 9-2

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;　　(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;　　(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3, \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) 利用商的求导法则，得

$$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{2u\cdot uv-(u^2+v^2)v}{(uv)^2}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},\quad \frac{\partial s}{\partial v}=\frac{2v\cdot uv-(u^2+v^2)u}{(uv)^2}=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}.$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot x=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}}=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$.

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)})=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$.

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设$T=2\pi\sqrt{l/g}$，求证$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$.

证明 因为$\dfrac{\partial T}{\partial l}=2\pi.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{l/g}}.\dfrac{1}{g}=\dfrac{\pi}{\sqrt{gl}}$，$\dfrac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{l/g}}\cdot\left(-\dfrac{l}{g^2}\right)=-\dfrac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}$，所以

$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{l/g}-\pi\sqrt{l/g}=0$

3. 设$z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证明 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，所以有

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

4. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求$f_x(x,1)$.

解 $f_x(x,y)=1+\dfrac{y-1}{\sqrt{1-\dfrac{x}{y}}}.\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}.\dfrac{1}{y}$，所以$f_x(x,1)=1$.

5. 曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线对于$x$轴的倾角是多少?

解 设$z=f(x,y)$，按偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点$(2,4,5)$处的切线对于x轴的斜率，而$f_x(2,4)=\dfrac{1}{2}x\Big|_{x=2}=1$，所以所求倾角为$\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$； (2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$； (3) $z=y^x$.

解 (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2+y^2-y.2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1), f_{xz}(1,0,2), f_{yz}(0,-1,0)$ 和 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 因为 $f_x=y^2+2xz$， $f_y=2xy+z^2$， $f_z=2zy+x^2$， $f_{xx}=2z$， $f_{xz}=2x$， $f_{yz}=2z$， $f_{zz}=2y$， $f_{zzx}=0$，所以有 $f_{xx}(0,0,1)=2$， $f_{xz}(1,0,2)=2$， $f_{yz}(0,-1,0)=0$， $f_{zzx}(2,0,1)=0$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x.\dfrac{y}{xy}=1+\ln(xy)$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$， $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

证明 (1) 因为 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$， $\dfrac{\partial y}{\partial x}=n\mathrm{e}^{-kn^2t}\cos nx$， $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$，

所以有 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$， $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$，由于函数关于自变量对称，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以有 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\dfrac{2}{r}$.

习题 9-3

1. 求下列函数的全微分.

(1) $z = xy + \frac{x}{y}$;　(2) $z = e^{\frac{y}{x}}$;　(3) $z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　(4) $u = x^{yz}$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x - \frac{x}{y^2}\right)dy.$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx - xdy).$$

(3) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$, 所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx - xdy).$$

(4) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz}\ln x$, 所以

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = yzx^{yz-1}dx + zx^{yz}\ln xdy + yx^{yz}\ln xdz.$$

2. 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1, y = 2$ 时的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$, 所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{1}{3}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{2}{3}$, 从而所求全微分

$$\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

3. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} - \frac{y}{x}$, $dz = -\frac{y}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x}\Delta y$, 所以当 $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$ 时的全增量 $\Delta z = \frac{1-0.2}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119$, 全微分 $dz = -\frac{0.1}{4} + \frac{1}{2}\times(-0.2) = -0.125$.

4. 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 因为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y=y\mathrm{e}^{xy}\Delta x+x\mathrm{e}^{xy}\Delta y$,

所以当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分 $\mathrm{d}z=\mathrm{e}\cdot 0.15+\mathrm{e}\cdot 0.1=0.25\mathrm{e}$.

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(2) $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续;

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分;

(4) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q, 则下列四个选项中正确的是(　　).

A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　B. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　D. $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

解 由已证定理知, 二元函数可微分可推得二元函数偏导数存在且连续, 而偏导数连续可推得函数可微分, 也即得到 $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$、$(4)$, 所以选 A.

***6.** 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$, 则 $z_x=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $z_y=\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$.

所以 $\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z$

$$\approx\sqrt{x^3+y^3}+\mathrm{d}z=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.$$

取 $x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$, 可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\times1\times0.02+3\times2^2\times(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

***7.** 计算 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值($\ln 2=0.693$).

解 设 $z=x^y$, 则 $z_x=yx^{y-1},z_y=x^y\ln x$. 所以

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+\mathrm{d}z=x^y+yx^{y-1}\cdot\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取 $x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$, 可得

$$(1.97)^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\cdot 0.05\approx 2.039.$$

***8.** 已知边长为 $x=6\mathrm{m}$ 与 $y=8\mathrm{m}$ 的矩形, 如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm, 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 则

$$\Delta z\approx\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

所以当 $x=6, y=8, \Delta x=0.05, \Delta y=-0.1$ 时，对角线的变化

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\times 0.05-8\times 0.1)=-0.05,$$

也即这个矩形的对角线的长减少大约 5cm .

***9**. 设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1cm，内高为 20cm，内半径为 4cm．求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱形的体积 $V=\pi r^2 h$，所求容器外壳体积就是圆柱体体积的增量 ΔV，而

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h=2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h.$$

则当 $r=4, h=20, \Delta r=\Delta h=0.1$ 时，$\Delta V \approx 2\times 3.14\times 4\times 20\times 0.1+3.1\times 4^2\times 0.1\approx 55.3$，即容器外壳的体积大约是 55.3cm^3 .

***10**. 设有直角三角形，测得其两直角边的长分别为 (7 ± 0.1)cm 和 (24 ± 0.1)cm．试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为 x 和 y，则斜边长度为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\begin{aligned}|\Delta z| \approx |\mathrm{d}z| &= \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x|+y|\Delta y|) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y)\end{aligned},$$

可得 $\delta_z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y)$．则当 $x=7, y=24, \delta_x=0.1, \delta_y=0.1$ 时，

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\times 0.1+24\times 0.1)\approx 0.124.$$

即计算斜边长度的绝对误差约为 0.124cm .

***11**. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 (63 ± 0.1)m 和 (78 ± 0.1)m，这两边的夹角为 $60^\circ \pm 1^\circ$．试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b，它们的夹角为 θ，则三角形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$，

$$\begin{aligned}|\Delta S| \approx |\mathrm{d}S| &= \left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial \theta}\Delta\theta\right| \leqslant \left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial \theta}\right||\Delta\theta| \\ &= \frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a|+\frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b|+\frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta| \\ &\leqslant \frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,\end{aligned}$$

可得

$$\delta_S=\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,$$

则当 $a=63,b=78,\theta=\dfrac{\pi}{3},\delta_a=0.1,\delta_b=0.1,\delta_\theta=\dfrac{\pi}{180}$ 时，三角形面积的近似值为

$$S=\frac{1}{2}\times 63\times 78\cdot\sin\frac{\pi}{3}\approx 2127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\delta_S=\frac{1}{2}\times 78\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 63\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 63\times 78\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\approx 27.6(\mathrm{m}^2),$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}\approx\frac{27.6}{2127.8}\approx 1.30\%.$$

***12**. 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

证明　设 $u=x+y$，则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,$$

于是有 $\delta_u=\delta_x+\delta_y$，即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

***13**. 利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

证明　设 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$，则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$

$$|\Delta v|\approx|\mathrm{d}v|=\left|\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right|=\left|\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2}\right|\leqslant\frac{|y||\Delta x|+|x||\Delta y|}{|y|^2}\leqslant\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

于是有 $\delta_u=|y|\delta_x+|x|\delta_y$，$\delta_v=\dfrac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}$，从而有

$$\frac{\delta_u}{|u|}=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|xy|}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|},\quad \frac{\delta_v}{|v|}=\frac{1}{\left|\dfrac{x}{y}\right|}\cdot\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题 9-4

1. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y,v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot 1+2v\cdot 1=4x,$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot 1+2v\cdot(-1)=4y.$$

2. 设 $z=u^2\ln v$,而$u=\dfrac{x}{y}$,$v=3x-2y$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$,而$x=\sin t$, $y=t^3$, 求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cos t+\mathrm{e}^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2).$$

4. 设 $z=\arcsin(x-y)$,而$x=3t$, $y=4t^3$, 求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=\mathrm{e}^x$, 求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x^2y^2}=\frac{(1+x)\mathrm{e}^x}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}.$$

6. 设 $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x$, $z=\cos x$, 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{a\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)=\mathrm{e}^{ax}\sin x.$$

7. 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$, 而 $x=u+v$, $y=u-v$, 验证$\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$.

证明 $$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数（其中 f 具有一阶连续偏导数）.

(1) $u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$;　　(2) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$;　　(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解 (1) 令 $s=x^2-y^2$，$t=\mathrm{e}^{xy}$，则函数 $u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$ 可视为由函数 $u=f(s,t)$ 及 $s=x^2-y^2$, $t=\mathrm{e}^{xy}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'.$$

(2) 令 $s=\dfrac{x}{y}$，$t=\dfrac{y}{z}$，则 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$ 可视为由 $u=f(s,t)$ 及 $s=\dfrac{x}{y},t=\dfrac{y}{z}$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_1',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_2'.$$

(3) 令 $s=x,t=xy,r=xyz$，则 $u=f(x,xy,xyz)$ 可视为由函数 $u=f(s,t,r)$ 及 $s=x,t=xy$, $r=xyz$ 复合而成, 根据复合函数的求导法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=xyf_3'.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$, 而 $u=\dfrac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证明
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+F(u)+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+y\left[x+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$
$$=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)]+y[x+F'(u)\right]=xy+xF(u)+xy=z+xy.$$

10. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

证明 令 $u=x^2-y^2$，因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-yf'(u)\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf'(u)}{f^2(u)}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)+yf'(u)\cdot 2y}{f^2(u)}=\frac{f(u)+2y^2f'(u)}{f^2(u)},$$

所以 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2yf'(u)}{f^2(u)}+\frac{f(u)+2y^2f'(u)}{yf^2(u)}=\frac{1}{yf(u)}=\frac{z}{y^2}$.

11. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$，则 $z=f(x^2+y^2)$ 可视为由函数 $z=f(u)$ 和 $u=x^2+y^2$ 复合而成，根据复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2yf',$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4y^2f''.$$

***12**. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）.

(1) $z=f(xy,y)$； (2) $z=f\left(x,\frac{x}{y}\right)$；

(3) $z=f(xy^2,x^2y)$； (4) $z=f(\sin x,\cos y,\mathrm{e}^{x+y})$.

解 (1) 令 $s=xy$，$t=y$，则 $z=f(xy,y)$ 可视为由 $z=f(s,t)$及$s=xy,t=y$ 复合而成，根据复合函数的求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=yf_1',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=xf_1'+f_2',$$

这里 f_1',f_2' 仍然是以 s,t 为中间变量的关于变量 x,y 的函数. 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(yf_1')=yf_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=y^2f_{11}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1')=f_1'+y\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right)=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(xf_1'+f_2')=x\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right)+f_{21}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=x^2f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''.$$

注：因为 f 具有二阶连续偏导数，所以 $f''_{12}=f''_{21}$.

(2) 令 $s=x$，$t=\dfrac{x}{y}$，则 $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$ 可视为由 $z=f(s,t)$ 和 $s=x$，$t=\dfrac{x}{y}$ 复合而成，根据复合函数的求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'_1+\frac{1}{y}f'_2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_2,$$

这里 f'_1,f'_2 仍然是以 s,t 为中间变量的关于变量 x,y 的函数. 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f'_1+\frac{1}{y}f'_2)=f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(f''_{21}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)=f''_{11}+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_1+\frac{1}{y}f'_2\right)=f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^3}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f'_2\right)=\frac{2x}{y^3}f'_2-\frac{x}{y^2}f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}f'_2+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}.$$

(3) 令 $s=xy^2$，$t=x^2y$，则 $z=f(xy^2,x^2y)$ 可视为由 $z=f(s,t)$ 和 $s=xy^2$，$t=x^2y$ 复合而成，根据复合函数的求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f'_1+2xyf'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf'_1+x^2f'_2,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f'_1+2xyf'_2)=y^2\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf'_2+2xy\left(f''_{21}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)\\&=y^2(y^2f''_{11}+2xyf''_{12})+2yf'_2+2xy(y^2f''_{21}+2xyf''_{22})\\&=y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+2yf'_2+4x^2y^2f''_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(y^2f'_1+2xyf'_2)=2yf'_1+y^2\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)+2xf'_2+2xy\left(f''_{21}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\&=2yf'_1+y^2(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+2yf'_2+2xy(2xyf''_{21}+x^2f''_{22})\\&=2yf'_1+2xf'_2+2xy^3f''_{11}+5x^2y^2f''_{12}+2x^3yf''_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf'_1+x^2f'_2)=2xf'_1+2xy\left(f''_{11}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{12}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)+x^2\left(f''_{21}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f''_{22}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)\\&=2xf'_1+2xy(2xyf''_{11}+x^2f''_{12})+x^2(2xyf''_{21}+x^2f''_{22})\\&=2xf'_1+4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{12}+x^4f''_{22}.\end{aligned}$$

(4) 令 $s=\sin x,t=\cos y,r=\mathrm{e}^{x+y}$，则 $z=f(\sin x,\cos y,\mathrm{e}^{x+y})$ 可视为由函数 $z=f(s,t,r)$ 及 $s=\sin x,t=\cos y,r=\mathrm{e}^{x+y}$ 复合而成，根据复合函数的求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\cos xf'_1+\mathrm{e}^{x+y}f'_3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}=-\sin yf_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3',$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x\left(f_{11}''\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+f_{13}''\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{31}''\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+f_{33}''\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x(\cos xf_{11}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{13}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(\cos xf_{31}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\sin xf_1'+\cos^2 xf_{11}''+2\mathrm{e}^{x+y}\cos xf_{13}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=\cos x\left(f_{12}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+f_{13}''\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$=\cos x(-\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{13}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos x\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos xf_{13}''-\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-\sin yf_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y\left(f_{22}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+f_{23}''\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y(-\sin yf_{22}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{23}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos yf_2'+\sin^2 yf_{22}''-2\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{23}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''.$$

***13**. 设$u=f(x,y)$的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

证明 因为$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$，

所以$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

又因为 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

习题 9-5

1. 设 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2$，则

$$F_x=\mathrm{e}^x-y^2, F_y=\cos y-2xy,$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\mathrm{e}^x-y^2}{\cos y-2xy}$.

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$，则

$$F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}$.

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$，则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}},\quad F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}},\quad F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},\ F_y=-\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},\ F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证明 令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则

$$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1,\ F_y=4\cos(x+2y-3z)-2=2F_x,$$

$$F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

6. 设 $x=x(y,z),y=y(x,z),z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

证明 因为 $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$，$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，

所以 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$

7. 设 $\phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证明 令 $u=cx-az$，$v=cy-bz$，则函数 $\phi(cx-az,cy-bz)$ 可视为由函数 $\phi(u,v)$ 和 $u=cx-az$，$v=cy-bz$ 复合而成，所以

$$\phi_x=\phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=c\phi_u,\ \phi_y=\phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=c\phi_v,\ \phi_z=\phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=-a\phi_u-b\phi_v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\phi_x}{\phi_z}=\frac{c\phi_u}{a\phi_u+b\phi_v},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\phi_x}{\phi_z}=\frac{c\phi_u}{a\phi_u+b\phi_v},$$

从而有 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{c\phi_u}{a\phi_u+b\phi_v}+b\dfrac{c\phi_v}{a\phi_u+b\phi_v}=c.$

***8**. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-xyz$，则

$$F_x=-yz,\ F_z=\mathrm{e}^z-xy,$$

于是有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}\right)=\frac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}(\mathrm{e}^z-xy)-yz\left(\mathrm{e}^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(\mathrm{e}^z-xy)^2}=\frac{2y^2z\mathrm{e}^z-2xy^3z-y^2z^2\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z-xy)^3}.$$

***9**. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$$F_x=-3yz,\ F_y=-3xz,\ F_z=3z^2-3xy,$$

于是有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{\left(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{\left(z+\dfrac{xyz}{z^2-xy}\right)(z^2-xy)-yz\left(\dfrac{2xz^2}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=\frac{z(z^4-2xyz^3-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数.

(1) 设 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

(3) 设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y).\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

(4) 设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1)分别在两个方程两端同时对 x 求导，得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ 2x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$

整理，得$\begin{cases} 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2x=0, \\ 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+x=0. \end{cases}$

所以当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix}=6yz+2y\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ x & 3z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-6xz-x}{6yz+2y},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2y & x \end{vmatrix}}{D}=\frac{2xy}{6yz+2y}=\frac{x}{3z+1}.$$

(2) 分别在两个方程两端同时对 z 求导，得$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+1=0, \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+2z=0. \end{cases}$

所以当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}=2(y-x)\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2z & 2y \end{vmatrix}}{D}=\frac{2z-2y}{2(y-x)}=\frac{z-y}{y-x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{x-z}{y-x}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，分别在两个方程两端同时对 x 求偏导，得$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$ 移项整理得

$$\begin{cases} (xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+uf_1'=0, \\ g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}-g_1'=0. \end{cases}$$

所以当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} xf_1'-1 & f_2' \\ g_1' & 2yvg_2'-1 \end{vmatrix}=(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} uf_1' & f_2' \\ -g_1' & 2yvg_2'-1 \end{vmatrix}}{D}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} xf'-1_1 & uf_1' \\ g_1' & -g_1' \end{vmatrix}}{D}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

(4) 此方程组可以确定两个二元隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，在两个方程两端分别同时对 x,y 求偏导，得

$$\begin{cases} 1=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}\qquad \begin{cases} 0=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

移项整理得

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}-1=0,\\[2ex](\mathrm{e}^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2ex](\mathrm{e}^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}-1=0.\end{cases}$$

所以当系数行列式 $D=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & u\cos v\\ \mathrm{e}^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}=u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & u\cos v\\ 0 & u\sin v\end{vmatrix}}{D}=\frac{-u\sin v}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u}=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & u\cos v\\ -1 & u\sin v\end{vmatrix}}{D}=\frac{u\cos v}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u}=\frac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & -1\\ \mathrm{e}^u-\cos v & 0\end{vmatrix}}{D}=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & 0\\ \mathrm{e}^u-\cos v & -1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u}.$$

11. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证明　构造方程组 $\begin{cases}y=f(x,t)\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$，则它可以确定两个一元隐函数 $y=y(x),t=t(x)$.

分别在两个方程两端同时对 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}\quad\text{整理得}\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial x}=0.\end{cases}$$

所以当系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t}\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

习题 9-6

1. 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{g}(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{u}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{v}$，证明 $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

证明

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\lim_{t\to t_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$=\lim_{t\to t_0}(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),\ f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),\ f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t))$$

$$=\left(\lim_{t\to t_0}[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)],\lim_{t\to t_0}[f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t)],\lim_{t\to t_0}[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)]\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \lim\limits_{t\to t_0}f_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0}g_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_3(t)\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

2. 下列各题中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是空间中质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$，$t_0=1$；

(2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$，$t_0=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\ln(t+1))\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k}$，$t_0=1$.

解 (1)速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=\left.(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\right|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，加速度 $\boldsymbol{a}_0=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=1}=2\boldsymbol{j}$，速率 $|\boldsymbol{v}_t|=|\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{5+4t^2}$.

同理，(2) $\boldsymbol{v}_0=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}_0=-3\boldsymbol{j}$，$|\boldsymbol{v}_t|=\sqrt{20+5\cos^2 t}.$

(3) $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}_0=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$|\boldsymbol{v}_t|=\sqrt{5t^2+\dfrac{4}{(t+1)^2}}$.

3. 求曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应点处的切线及法平面方程.

解 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点为 $\left.\left((t-\sin t),(1-\cos t),\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\right)\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$，曲线在该点的切向

量为 $\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,1,\sqrt{2})$，于是所求切线方程为

$$\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+y-1+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,$$

即
$$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

4. 求曲线 $x=\frac{t}{1+t}$，$y=\frac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在对应于 $t_0=1$ 的点处的切线及法平面方程.

解 对应于 $t_0=1$ 的点为 $\left(\frac{1}{2},2,1\right)$，该点处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(x'(1),y'(1),z'(1))=\left.\left(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t\right)\right|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即
$$2x-8y+16z-1=0.$$

5. 求曲线 $y^2=2mx$，$z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

解 将曲线方程两端对 x 求导得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2m,2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1,\text{ 即 }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{y},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 的切向量为 $\boldsymbol{T}=\left(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right)$. 于是所求切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

所求法平面方程 $(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$

6. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

解 曲线方程两端分别对x求导得

$$\begin{cases} 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x+3, \\ 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2. \end{cases}$$

解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} -2x+3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} 2y & -2x+3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

故$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{9}{16}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=-\dfrac{1}{16}$. 于是在点$(1,1,1)$处的切向量取为$(16,9,-1)$. 所求切线为

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

所求法平面为$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$, 即$16x+9y-z-24=0$.

7. 求出曲线$x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$上的点, 使在该点的切线平行于平面$x+2y+z=4$.

解 由于$x'=1, y'=2t, z'=3t^2$, 设所求点对应的参数为a, 于是该点处的切向量可取为$\boldsymbol{T}=(1,2a,3a^2)$. 已知平面的法向量为$\boldsymbol{n}=(1,2,1)$, 由切线与平面平行, 得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=1+4a+3a^2=0,$$

解得$a=-1$或$a=-\dfrac{1}{3}$. 故所求点为$(-1,1,-1)$或$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}\right)$.

8. 求曲面$\mathrm{e}^z-z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面及法线方程.

解 令$F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3$, 则法向量为

$$\boldsymbol{n}\big|_{(2,1,0)}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(2,1,0)}=(y,x,\mathrm{e}^z-1)\big|_{(2,1,0)}=(1,2,0).$$

于是所求切平面方程为$(x-2)+2(y-1)=0$, 即$x+2y=4$. 所求法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}.$$

9. 求曲面$ax^2+by^2+cz^2=1$在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面及法线方程.

解 方法同题 8. 所求切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即
$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$

所求法线方程为
$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$. 故法向量为 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$. 所求切平面与已知平面平行, 故

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}\text{, 即 } x=-2y,z=-4y.$$

代入椭球面方程得 $22y^2=1$, 故 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{22}}$, $x=\mp\sqrt{\frac{2}{11}}, z=\mp2\sqrt{\frac{2}{11}}$.

于是所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\sqrt{\frac{1}{22}}\right)+2\left(z\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即
$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$. 故法向量为

$$\boldsymbol{n}\big|_{(-1,-2,3)}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(-1,-2,3)}=(6x,2y,2z)\big|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6).$$

xOy 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$, 则所求夹角的余弦即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$ 的夹角的余弦为

$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}=\frac{6}{\sqrt{36+16+36}\cdot1}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证明 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$, 则曲面在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right),$$

于是曲面在任一点 $M(b,c,d)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}(x-b)+\frac{1}{2\sqrt{c}}(y-c)+\frac{1}{2\sqrt{d}}(z-d)=0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{b}}+\frac{y}{\sqrt{c}}+\frac{c}{\sqrt{d}}=\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{a},$$

所以截距之和为 $\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})=(\sqrt{a})^2=a.$

13. 设 $\boldsymbol{u}(t)$ 、$\boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数, 证明:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)\right]=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\right]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)\right]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

证明 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)\right]=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\pm\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]-\left[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)\right]}{\Delta t}$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\pm\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t).$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\right]&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\right]\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t)\cdot\left[\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)\right]}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\right]}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)\right]}{\Delta t}\\&=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t).\end{aligned}$$

(3) 同(2), 略.

习题 9-7

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

解 由题意得, 方向 $\boldsymbol{l}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2x|_{(1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=2y|_{(1,2)}=4,$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这条抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在 $y^2=4x$ 两端对 x 求导, 得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4$. 于是

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{2}{y}\right|_{(1,2)}=1,$$

切线方向 $\boldsymbol{l}=(1,1)$, $\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率：在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导，得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\ k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$$

法线斜率为 $k'=-\frac{1}{k}=\frac{a}{b}$，内法线方向 $\boldsymbol{l}=(-b,-a)$，$\boldsymbol{e_l}=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 又

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\left.\frac{2x}{a^2}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\left.\frac{2y}{b^2}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{b}.\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz,\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy,$

所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)}=-1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)}=11.$

又 $\boldsymbol{e_l}=\left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$

故 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)}=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+11\cdot\frac{1}{2}=5.$

5. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

解 由题意，得方向 $\boldsymbol{l}=(4,3,12)$，$\boldsymbol{e_l}=\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$.

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)}=yz|_{(5,1,2)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)}=xz|_{(5,1,2)}=10,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)}=xy|_{(5,1,2)}=5.$

故 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)}=2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13}=\frac{98}{13}.$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处，沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

解 先求曲线在给定点处的切线方向. 因为 $x'=1,y'=2t,z'=3t^2$，所以曲线在点 $(1,1,1)$ 处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3),\boldsymbol{e_T}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right).$

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2x|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2y|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2z|_{(1,1,1)}=2.$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial T}\right|_{(1,1,1)}=2\left(\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$. 于是球面在点 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为 $\boldsymbol{l}=(2x_0,2y_0,2z_0),\boldsymbol{e}_l=(x_0,y_0,z_0)$.

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=1$. 故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=x_0+y_0+z_0.$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求

$$\operatorname{grad}f(0,0,0)\text{ 及 }\operatorname{grad}f(1,1,1).$$

解 $$\operatorname{grad}f(x,y,z)=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}$$

$$\operatorname{grad}f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},\quad \operatorname{grad}f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9. 设函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续，证明:

(1) $\nabla(cu)=c\nabla(u)$（其中 c 为常数）; (2) $\nabla(u\pm v)=\nabla(u)\pm\nabla(v)$;

(3) $\nabla(uv)=v\nabla(u)+u\nabla(v)$; (4) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla(u)-u\nabla(v)}{v^2}$.

证明 (1) $\nabla(cu)=\left(c\frac{\partial u}{\partial x},c\frac{\partial u}{\partial y},c\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=c\nabla(u).$

(2) $$\nabla(u\pm v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\pm\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\nabla(u)\pm\nabla(v).$$

(3) $$\nabla(uv)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=v\nabla(u)+u\nabla(v).$$

(4) $$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)=\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}v-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2},\frac{\frac{\partial u}{\partial y}v-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2},\frac{\frac{\partial u}{\partial z}v-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)$$
$$=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{u}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{v\nabla(u)-u\nabla(v)}{v^2}.$$

10. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

解 $\nabla u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k}$, $\nabla u\big|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

由方向导数与梯度的关系可知，$u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{n}=\nabla u\big|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的方向增加最快，其方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P_0}=\left|\nabla u\big|_{P_0}\right|=\sqrt{21};$$

沿 $\boldsymbol{n}_1=-\nabla u\big|_{P_0}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向减少最快，其方向导数为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n_1}\right|_{P_0}=-\left|\nabla u\big|_{P_0}\right|=-\sqrt{21}$.

习题 9-8

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

则下述四个选项中正确的是（　　）.

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　D. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\rho\to 0$.

由于 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近的值主要取决于 xy 的值，而 xy 在点 $(0,0)$ 附近符号不定，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，应选 A.

2. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x=4-2x=0\\ f_y=-4-2y=0\end{cases},$$

求得驻点为 $(2,-2)$. 又

$$A=f_{xx}(2,-2)=-2<0,B=f_{xy}(2,-2)=0,C=f_{yy}(2,-2)=-2,AC-B^2=4>0,$$

由判定极值的充分条件知：在 $(2,-2)$ 处，函数取得极大值 $f(2,-2)=8$.

3. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0\\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0\end{cases},$$

求得五组解：

$$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=0,\\y_2=4,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=3,\\y_3=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=6,\\y_5=4.\end{cases}$$

又 $f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2)$, $f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y)$, $f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$.

由判定极值的充分条件知：

在 $(0,0)$ 处，$A=f_{xx}(0,0)=0, B=f_{xy}(0,0)=24, C=f_{yy}(0,0)=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(0,0)$ 不是极值;

在 $(0,4)$ 处，$A=f_{xx}(0,4)=0, B=f_{xy}(0,4)=-24, C=f_{yy}(0,4)=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(0,4)$ 不是极值;

在 $(3,2)$ 处，$A=f_{xx}(3,2)=-8<0, B=f_{xy}(3,2)=0, C=f_{yy}(3,2)=-18$, $AC-B^2=144>0$, 故函数在 $(3,2)$ 点取到极大值，极大值为 $f(3,2)=36$;

在 $(6,0)$ 处，$A=f_{xx}(6,0)=0, B=f_{xy}(6,0)=-24, C=f_{yy}(6,0)=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(6,0)$ 不是极值;

在 $(6,4)$ 处，$A=f_{xx}(6,4)=0, B=f_{xy}(6,4)=24, C=f_{yy}(6,4)=0$, $AC-B^2=-24^2<0$, 故 $f(6,4)$ 不是极值.

4. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2+2y)=0 \end{cases},$$

求得驻点为 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$. 又

$$A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2\mathrm{e}>0, B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0, C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2\mathrm{e}, AC-B^2=4\mathrm{e}^2>0,$$

由判定极值的充分条件知，在点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 处，函数取到极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

5. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解　由 $x+y=1$ 得 $y=1-x$，代入 $z=xy$ 得 $z=x(1-x)$.

又 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-2x=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

由于 $\left.\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\frac{1}{2}}=-2<0$, 所以根据一元函数取得极值的充分条件知 $x=\frac{1}{2}$ 为极大值点，极大值为 $z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解　设直角三角形的两个直角边之长分别为 x,y，则周长

$$S=x+y+l(0<x,y<l,).$$

则问题转化为求周长 S 在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x=1+2\lambda x=0, \\ L_y=1+2\lambda y=0, \end{cases}$$

得 $x = y = -\dfrac{1}{2\lambda}$, 代入 $x^2 + y^2 = l^2$, 得 $\lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{2l}$, 于是 $x = y = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$, $\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}, \dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$ 是唯一可能的极值点, 根据问题性质可知这种周长最大的三角形一定存在, 所以在斜边为 l 的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰直角三角形.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

解 设水池的长宽高分别为 x, y, z, 则水池的表面积为

$$S = xy + 2xz + 2yz(x, y, z > 0).$$

约束条件为 $xyz = k$. 作拉格朗日函数 $L(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - k)$. 解方程组

$$\begin{cases} L_x = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ L_y = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ L_z = 2x + 2y + \lambda xy = 0, \\ xyz = k, \end{cases}$$

得 $x = y = \sqrt[3]{2k}, z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}, \lambda = -\sqrt[3]{\dfrac{32}{k}}$. $\left(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$ 是唯一可能的极值点, 所以表面积最小的水池的长和宽都应是 $\sqrt[3]{2k}$, 高为 $\dfrac{\sqrt[3]{2k}}{2}$.

8. 在平面 xOy 上求一点, 使它到 $x = 0, y = 0$ 及 $x + 2y - 16 = 0$ 三直线的距离的平方之和最小.

解 设所求点为 (x, y), 则此点到三直线的距离分别是 $|x|, |y|, \dfrac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}$, 其平方和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x + 2y - 16)^2.$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + \dfrac{2}{5}(x + 2y - 16) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + \dfrac{4}{5}(x + 2y - 16) = 0, \end{cases}$$

求得唯一可能的极值点 $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$, 所以所求点为 $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为 x, 则另一边长为 $p - x$. 假设矩形绕长为 $p - x$ 的边旋转, 则所成圆柱体的体积为 $V = \pi x^2(p - x)$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi x(2p - 3x) = 0$, 得驻点 $x = \dfrac{2p}{3}$. 由于驻点唯一, 所以矩形当边长为 $\dfrac{2p}{3}$ 与 $\dfrac{p}{3}$ 时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，(x,y,z) 是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点，则长方体的长、宽、高分别为 $2x$、$2y$、$2z$，体积为 $V=8xyz$.

令 $L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$，解方程组

$$\begin{cases} L_x=8yz+2\lambda x=0, \\ L_y=8xz+2\lambda y=0, \\ L_z=8xy+2\lambda z=0, \end{cases}$$

得 $x=y=z=-\dfrac{\lambda}{4}$，代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得 $\lambda=-\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$，故 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$ 是唯一可能的极值点，所以当长方体的长、宽、高都是 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求该椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为 (x,y,z)，则椭圆上的点到原点的距离平方为 $d^2=x^2+y^2+z^2$.

x,y,z 满足 $z=x^2+y^2$，$x+y+z=1$. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0, & (1) \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0, & (2) \\ L_z=2z-\lambda+\mu=0, & (3) \end{cases}$$

式(1)减去式(2)，得 $(1+\lambda)(x-y)=0$，故 $\lambda=-1$ 或 $x=y$.

由 $\lambda=-1$ 得 $\mu=0, z=-\dfrac{1}{2}$，不合题意，故舍去.

将 $x=y$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$ 得 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z=2\mp\sqrt{3}$，于是得到两个可能的极值点

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),\ M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

由于 $2\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3}$，故距离的最大值与最小值分别是

$d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}, d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

12. 设有一圆板占有平面闭区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. 该圆板被加热，以致在点 (x,y) 的温度是

$$T=x^2+2y^2-x.$$

求该圆板的最热点与最冷点.

解 解方程组

$$\begin{cases} T_x=2x-1=0, \\ T_y=4y=0, \end{cases}$$

求得驻点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. $T_1=T\big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)}=-\dfrac{1}{4}$.

在边界$x^2+y^2=1$上，$T=2-(x^2+x)=\dfrac{9}{4}-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$. 当$x=-\dfrac{1}{2}$时，有边界上的最大值$T_2=\dfrac{9}{4}$，$x=1$时，有边界上的最小值$T_3=0$.

比较知，最热点在$\left(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$T_{\max}=\dfrac{9}{4}$，最冷点在$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，$T_{\min}=-\dfrac{1}{4}$.

13. 形状为椭球$4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器的点(x,y,z)的温度$T=8x^2+4yz-16z+600$，求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16).$$

令

$$\begin{cases} L_x=16x+8\lambda x=0, & (1)\\ L_y=4z+2\lambda y=0, & (2)\\ L_z=4y-16+8\lambda z=0, & (3)\end{cases}$$

由式(1)得$x=0$或$\lambda=-2$. 将$\lambda=-2$代入式(2)、式(3)得$y=z=-\dfrac{4}{3}$. 再$y=z=-\dfrac{4}{3}$将代入约束条件

$$4x^2+y^2+4z^2=16 \qquad (4)$$

得$x=\pm\dfrac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点$M_1\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right),M_2\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$.

若$x=0$，由式(2)、式(3)、式(4)得$\lambda=0,y=4,z=0$；$\lambda=\sqrt{3},y=-2,z=\sqrt{3}$；$\lambda=-\sqrt{3}$，$y=-2$，$z=-\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能的极值点:

$$M_3(0,4,0),M_4(0,-2,\sqrt{3}),M_5(0,-2,-\sqrt{3}).$$

比较T在上述五个可能极值点处的数值知：$T\big|_{M_1}=T\big|_{M_2}=\dfrac{1928}{3}$为最大，因此探测器表面的最热的点为$M\left(\pm\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$.

*习题 9-9

1. 求函数$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$在点$(1,-2)$的泰勒公式.

解 $f(1,-2)=5,\ f_x(1,-2)=(4x-y-6)\big|_{(1,-2)}=0,\ f_y(1,-2)=(-x-2y-3)\big|_{(1,-2)}=0,$

$$f_{xx}(1,-2)=4,\ f_{xy}(1,-2)=-1,\ f_{yy}(1,-2)=-2.$$

此函数的 3 阶及以上的偏导数均为 0，故

$$\begin{aligned} f(x,y)=&\ f(1,-2)+f_x(1,-2)(x-1)+f_y(1,-2)(y+2)+\frac{1}{2!}[f_{xx}(1,-2)(x-1)^2+\\ &2f_{xy}(1,-2)(x-1)(y+2)+f_{yy}(1,-2)(y+2)^2]\end{aligned}$$

$$=5+\frac{1}{2}\left[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2\right]$$
$$=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

2. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

解 $f_x=f_{xx}=f_{xxx}=\mathrm{e}^x\ln(1+y),\ f_y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+y}=f_{xy},\ f_{yy}=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+y)^2},\ f_{yyy}=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+y)^3}$. 令 $h=x-0,k=y-0$，则 $f(0,0)=0,\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k,$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)=h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0)=2hk-k^2,$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0)=h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)+k^3f_{yyy}(0,0)$$
$$=3h^2k-3hk^2+2k^3,$$

故 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)=y+\dfrac{1}{2}(2xy-y^2)+\dfrac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3$, 其中

$$R_3=\frac{1}{4!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right],(0<\theta<1).$$

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

解

$$f_x=\cos x\sin y,\ f_y=\sin x\cos y,\ f_{xx}=-\sin x\sin y,\ f_{xy}=\cos x\cos y,\ f_{yy}=-\sin x\sin y,$$
$$f_{xxx}=-\cos x\sin y,\ f_{xxy}=-\sin x\cos y,\ f_{xyy}=-\cos x\sin y,\ f_{yyy}=-\sin x\cos y.$$

于是 $f\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2},\ \left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=hf_x\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)+kf_y\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}h+\dfrac{1}{2}k,$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=h^2f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+k^2f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}h^2+hk-\frac{1}{2}k^2,$$

其中 $h=x-\dfrac{\pi}{4},k=y-\dfrac{\pi}{4}$. 故

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=\dfrac{1}{3!}\left[\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\xi,\eta)\right]_{h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}}$

$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\Bigg],$$

$\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right),0<\theta<1.$

4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式，计算$1.1^{1.02}$ 的近似值.

解　先求 $f(x,y)=x^y$ 在点$(1,1)$处的三阶泰勒公式. 令 $h=x-1,k=y-1$，则

$f(1,1)=1,\ f_x(1,1)=yx^{y-1}|_{(1,1)}=1,\ f_y(1,1)=x^y\ln x|_{(1,1)}=0,\ f_{xx}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}|_{(1,1)}=0,$

$f_{xy}(1,1)=\left[x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right]\Big|_{(1,1)}=1,\ f_{yy}(1,1)=x^y\ln^2 x|_{(1,1)}=0,$

$f_{xxx}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}|_{(1,1)}=0,\ f_{xxy}(1,1)=\left[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x\right]\Big|_{(1,1)}=1,$

$f_{xyy}(1,1)=\left[2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2 x\right]|_{(1,1)}=0,\ f_{yyy}(1,1)=x^y\ln^3 x|_{(1,1)}=0.$

从而 $x^y=1+(x-1)+\frac{1}{2!}\left[2(x-1)(y-1)\right]+\frac{1}{3!}\left[3(x-1)^2(y-1)\right]+R_3$

$\quad=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3$

于是$1.1^{1.02}\approx1+0.1+0.1\times0.02+\frac{1}{2}\times0.1^2\times0.02=1.1021.$

5. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在点$(0,0)$的 n 阶泰勒公式.

解　$f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=\mathrm{e}^{x+y}|_{(0,0)}=1,\ f_y(0,0)=\mathrm{e}^{x+y}|_{(0,0)}=1$. 用数学归纳法可证

$$f_{x^m y^{n-m}}^{(n)}(0,0)=\mathrm{e}^{x+y}|_{(0,0)}=1,\quad m=0,1,\cdots,n.$$

令 $h=x,k=y$, 于是

$$\mathrm{e}^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n,$$

其中 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}\mathrm{e}^{\theta(x+y)}(0<\theta<1).$

*习题 9-10

1. 某种合金的含铅量百分比（%）为 p，其溶解温度（℃）为θ，由实验测得 p 与θ的数据如下表:

p/%	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ/°C	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立θ与 p 之间的经验公式$\theta=ap+b$.

解　设 M 是各个数据的偏差平方和，即 $M=\sum_{i=1}^{6}\left[\theta_i-(ap_i+b)\right]^2$. 令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-\sum_{i=1}^{6}2p_i\left[\theta_i-(ap_i+b)\right]=0\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-\sum_{i=1}^{6}2\left[\theta_i-(ap_i+b)\right]=0\end{cases}.$$

整理得

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{6} p_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} p_i = \sum_{i=1}^{6} p_i\theta_i \\ a\sum_{i=1}^{6} p_i + 6b = \sum_{i=1}^{6} \theta_i \end{cases}.$$

计算得 $\sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 28365.28, \sum_{i=1}^{6} p_i = 396.6, \sum_{i=1}^{6} \theta_i p_i = 101176.3, \sum_{i=1}^{6} \theta_i = 1458.$

代入方程组，解得 $a = 2.234, b = 95.33$. 故经验公式为 $\theta = 2.234p + 95.33$.

2. 已知一组实验数据为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立 a、b、c 应满足的三元一次方程组.

解 设 M 是各个数据的偏差平方和，即 $M = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]^2$. 令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i^2 = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i = 0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right] = 0 \end{cases}.$$

整理,得 a、b、c 应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

总 习 题 九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内.

(1) $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的________条件. $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件;

(2) $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的__________条件.

$z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在的__________条件;

(3) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的________条件;

(4) 函数 $f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的________条件.

解 (1) 充分, 必要. (2) 必要, 充分. (3) 充分. (4) 充分.

2. 下题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论.

设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义, 且 $f_x(0,0)=3$, $f_y(0,0)=-1$, 则有________.

A. $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

解 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数存在, 不一定可微分, 故 A 不对.

曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个法向量是 $(3,-1,-1)$, 而不是 $(3,-1,1)$, 故 B 不对.

取 x 为参数, 则 $x=x, y=0, z=f(x,0)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的一个切向量是 $(1,0,3)$, 故 C 正确.

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域, 并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)$.

解 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\big|0<x^2+y^2<1, y^2\leqslant 4x\}$. 由于 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)\in D$, $f(x,y)$ 为初等函数, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)=f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}$.

***4**. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

解 取两条趋于 $(0,0)$ 的路径, $C_1: x=0$ 和 $C_2: y^2=x$, 沿着这两条路径分别求函数的极限有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_1}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

由于函数沿着不同的路径趋于 $(0,0)$ 时的极限不相等, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数: (1) $z=\ln(x+y^2)$; (2) $z=x^y$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y^2)^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x.$$

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\dfrac{2.01\times 1.03}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\dfrac{2}{2^2-1}=0.03.$

又 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=\left.\dfrac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2}\right|_{(2,1)}=-\dfrac{5}{9},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\left.\dfrac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2}\right|_{(2,1)}=\dfrac{10}{9},$

故 $\mathrm{d}z\big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=2,\Delta y=0.03}}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$

***8**. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微分.

证明 因为 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

$$\Delta z-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{3/2}},$$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{3/2}}}{\rho}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^4}{\left[2(\Delta x)^2\right]^2}=\dfrac{1}{4}\neq 0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数存在，但不可微分.

9. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 都是可微函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\psi'(t).$

10. 设 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而 $u=\eta-\zeta,v=\zeta-\xi,w=\xi-\eta$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial\xi},\dfrac{\partial z}{\partial\eta},\dfrac{\partial z}{\partial\zeta}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}=-f_v+f_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}=f_u-f_w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial\zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial\zeta}=-f_u+f_v.$$

11. 设 $z=f(u,x,y),u=x\mathrm{e}^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot \mathrm{e}^y+f_x,$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot \mathrm{e}^y+f_x)=\frac{\partial}{\partial y}f_u\cdot \mathrm{e}^y+f_u\cdot \mathrm{e}^y+\frac{\partial}{\partial y}f_x\\&=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)\cdot \mathrm{e}^y+f_u\cdot \mathrm{e}^y+\left(f_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\right)\\&=x\mathrm{e}^{2y}f_{uu}+\mathrm{e}^y f_{uy}+x\mathrm{e}^y f_{xu}+f_{xy}+\mathrm{e}^y f_u.\end{aligned}$$

12. 设 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v, z=uv$. 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 分别在 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v$ 两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\ \mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}\cos v,\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-u}\sin v$. 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}(v\cos v-u\sin v).$$

分别在 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v$ 两端对 y 求偏导数，得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \mathrm{e}^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{e}^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\sin v,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\cos v$. 从而

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\left(u\cos v+v\sin v\right).$$

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-a\sin\theta,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=a\cos\theta,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}=b.$

点 $(a,0,0)$ 所对应的参数 $\theta=0$，故曲线在此点的切向量为 $\boldsymbol{T}=(0,a,b)$，于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b},$$

法平面方程为
$$a(y-0)+b(z-0)=0,$$
即
$$ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线的方程.

解 设所求点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，曲面在该点处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(y_0,x_0,-1)$，平面的法向量为 $(1,3,1)$. 由题意，$\boldsymbol{n}$ 垂直于平面，故有

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3$. 于是所求点为 $(-3,-1,3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$，求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角 θ，使该导数有(1)最大值, (2)最小值, (3)等于 0 .

解 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=(2x-y)|_{(1,1)}=1, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=(2y-x)|_{(1,1)}=1.$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

所以(1) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数最大, 其最大值为 $\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时, 方向导数最小, 其最大值为 $-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时, 方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处外法线的方向向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$,

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\frac{x_0}{a^2}+2y_0\frac{y_0}{b^2}+2z_0\frac{z_0}{c^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

17. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x,y,z)$，它到 xOy 面上的距离的平方为 z^2. 作拉格朗日函数

$$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = \dfrac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \dfrac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \dfrac{\lambda}{5} = 0, \\ L_\lambda = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} - 1 = 0, \\ L_\mu = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $x = \dfrac{4}{5}, y = \dfrac{3}{5}, z = \dfrac{35}{12}$. 于是, 得可能的极值点 $M_0\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{35}{12}\right)$, 即为距离最短的点.

18. 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小. 求该切平面的切点, 并求此最小体积.

解 设切点为 $M(x_0, y_0, z_0)$, $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$, $\boldsymbol{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}, \dfrac{2z}{c^2}\right)$.

曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即 $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$. 于是, 切平面在三个坐标轴上的截距依次是 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$, 则切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积为 $V = \dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0 y_0 z_0}$. 在 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的条件下, 求 V 的最小值, 即分母 xyz 的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0. \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0. \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

解得 $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$. 于是, 得到可能极值点 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

故所求切点为 $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$, 四面体的体积最小为 $V_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2, 销售量分别为 q_1 和 q_2, 需求函数分别为 $q_1 = 24 - 0.2p_1, q_2 = 10 - 0.05p_2$, 总成本函数为 $C = 35 + 40(q_1 + q_2)$.

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 才能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解 总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$

总利润函数为 $L=R-C=32p_1-0.2p_1^2-0.05p_2^2+12p_2-1395.$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial p_2}=-0.1p_2+12=0,\end{cases}$$

解得 $p_1=80, p_2=120$. 故当 $p_1=80, p_2=120$ 时, 厂家所获得总利润最大, 最大利润为

$$L\big|_{(80,120)}=605.$$

20. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$, 小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$

(1) 设 $M(x_0,y_0)\in D$, 问 $f(x,y)$ 在该点沿平面什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$, 试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式;

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知, $h=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大, 其最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x,y)$ 达到最大值的点, 只需求 $F(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 达到最大值的点. 因此, 作拉格朗日函数

$$L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75).$$

令

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0, & (1)\\ L_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0, & (2)\\ L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0, & (3)\end{cases}$$

(1) + (2)得 $(x+y)(2+\lambda)=0$, 解得 $y=-x$ 或 $\lambda=-2$.

若 $\lambda=-2$, 则由(1)得 $y=x$, 再由(3)得 $y=x=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$, 则由(3)得 $x=\pm5, y=\mp5.$

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),M_2(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}),M_3(5,-5),M_4(-5,5).$$

由于 $F(M_1)=F(M_2)=150, F(M_3)=F(M_4)=450$, 故 $M_3(5,-5)$ 或 $M_4(-5,5)$ 可作为攀岩的起点.

第 10 章

重 积 分

一、基 本 内 容

1. 二重积分的概念与性质.
2. 二重积分的计算方法及应用.
3. 三重积分的概念及计算方法.

二、基 本 要 求

1. 理解重积分的定义, 熟悉重积分的性质.
2. 掌握二重积分的计算方法, 包括直角坐标、极坐标; 掌握三重积分的计算方法, 包括直角坐标、柱面坐标、球面坐标.
3. 熟悉重积分在几何物理中的应用, 包括平面图形的面积、立体体积; 平面薄片和空间立体的质量、重心、转动惯量.

三、习 题 解 答

习题 10-1

二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板（不计其厚度）, 占有 xOy 面上的闭区域 D , 薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷, 且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q .

解 对 D 进行剖分, 将其分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$, 其面积也记为 $\Delta\sigma_i$ ($i=1,2,\cdots,n$). 任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$, 则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷为 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\ \Delta\sigma_i$, 所以该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma ,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$.

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D_1=\left\{(x,y)\big|-1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\right\}$;

又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 如图 10-1 所示，由二重积分的几何意义知，I_1 表示底为 D_1、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积；I_2 表示底为 D_2、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积. D_2 面积为 D_1 面积的四分之一. 由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分，其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2. 所以 $I_1=4I_2$.

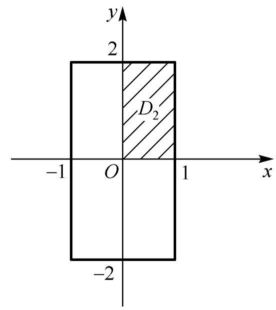


图 10-1

3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$（其中 σ 为 D 的面积）；

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（其中 k 为常数）；

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 其中 $D=D_1\cup D_2$，D_1,D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证明 (1) 由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$，所以由二重积分定义得

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\sigma .$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(3) 因为函数 $f(x,y)$ 在闭区域上 D 可积，所以无论怎样分割 D，积分和的极限总是一样的. 因此在分割 D 时，可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x,y)$ 在 $D_1\cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和，记为

$$\sum_{D_1\cup D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{D_1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

4. 试确定积分区域 D, 使二重积分 $\iint_D(1-2x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最大值.

解 二重积分的几何意义是曲顶柱体的体积，当被积函数小于零时所对应的体积为负值，所以积分区域为 $\{D|1-2x^2-y^2\geqslant 0\}$ 时二重积分 $\iint_D(1-2x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 达到最大值.

5. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小.

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 x 轴 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成;

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成;

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$；

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 (1)在积分区域 D 上，$0\leqslant x+y\leqslant 1$，故有 $(x+y)^3\leqslant(x+y)^2$. 所以

$$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma .$$

(2) 圆心 $(2,1)$ 到 $x+y=1$ 的距离为 $d=\dfrac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，所以直线 $x+y=1$ 与圆相切，故积分区域 D 内的点满足 $x+y\geqslant 1$，故在 D 上有 $(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$，从而

$$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma .$$

(3) $(1,1)$，$(2,0)$ 两点连线方程为 $x+y=2$，过点 $(1,0)$ 与 $x+y=2$ 平行的直线方程为 $x+y=1$，所以积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y)|1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ 内，故知区域 D 上的点满足 $0\leqslant\ln(x+y)\leqslant 1$，从而有 $[\ln(x+y)]^2\leqslant\ln(x+y)$. 因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma .$$

(4) 过点 $(3,0)$ 与 $x+y=k$ 平行的直线为 $x+y=3$，所以积分区域 D 内的点满足 $x+y\geqslant 3$，从而 $[\ln(x+y)]^2\geqslant\ln(x+y)$. 因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma .$$

6. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$；

(2) $I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$；

(3) $I=\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$；

(4) $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，从而 $0\leqslant x+y\leqslant 2$，$0\leqslant xy\leqslant 1$，所以 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$. 又 D 的面积为 1，因此

$$0\leqslant \iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma \leqslant 2 .$$

(2) 在积分区域 D 上，$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，$0 \leqslant \sin y \leqslant 1$，从而 $0 \leqslant \sin x^2 \sin^2 y \leqslant 1$，又 D 的面积为 π^2，因此

$$0 \leqslant \iint_D \sin^2 x \sin^2 y \mathrm{d}\sigma \leqslant \pi^2 .$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1 \leqslant x+y+1 \leqslant 4$，$D$ 的面积为 2，因此

$$2 \leqslant \iint_D (x+y+1)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant 8 .$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$，所以有

$$9 \leqslant x^2+4y^2+9 \leqslant 4(x^2+y^2)+9 \leqslant 25 .$$

又 D 的面积为 4π，所以

$$36\pi \leqslant \iint_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant 100\pi .$$

习题 10-2

二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分.

(1) $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$；

(2) $\iint_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$；

(4) $\iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

解 (1) $$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}+y^2+\frac{1}{3}+y^2\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{2y}{3}+\frac{2y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} .$$

(2) D 可用不等式表示为 $0 \leqslant x \leqslant 2$，$0 \leqslant y \leqslant 2-x$ 或 $0 \leqslant y \leqslant 2$，$0 \leqslant x \leqslant 2-y$.

$$\iint_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}(3x+3y)\,\mathrm{d}x = \int_0^2\left[\frac{3x^2}{2}+2yx\right]_0^{2-y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2\left(\frac{3}{2}(2-y)^2+2y(2-y)\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{-(2-y)^3}{2}+2y^2-\frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{20}{3} .$$

(3) $$\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}y = \int_0^1\left[x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}\right]_0^1\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left(x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1 = 1 .$$

(4) D 可用不等式表示为 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，$0 \leqslant y \leqslant x$. 所以

$$\iint_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}x\int_0^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} x[\sin(x+y)]_0^x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} x(\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{-x}{2}\mathrm{d}\cos 2x + \int_0^{\pi} x\mathrm{d}\cos x$$

$$= \frac{-x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{2}\mathrm{d}x + x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x = \frac{-3}{2}\pi.$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分.

(1) $\iint_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint_D xy^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

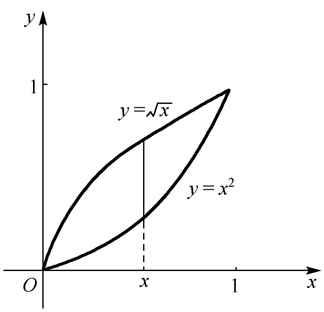


图 10-2

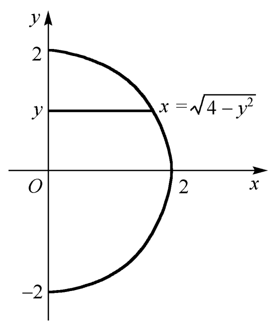


图 10-3

解　(1) 如图 10-2 所示, D 可用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant 1$，$y^2\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$ 或 $0\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$. 由于先对 y 后对 x 的积分不好计算, 所以我们选用先对 x 后对 y 的积分次序, 故有

$$\iint_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\sqrt{y}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{y}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int_0^1\sqrt{y}\left(\frac{y-y^4}{2}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1\frac{1}{2}(y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{9}{2}})\mathrm{d}y = \frac{6}{55}.$$

(2) 如图 10-3 所示, D 可用不等式表示为 $0\leqslant x\leqslant 2$, $-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-y^2}$ 或 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}$，$-2\leqslant y\leqslant 2$. 由于先对 y 后对 x 的积分不好计算, 所以我们选用先对 x 后对 y 的积分次序, 故有

$$\iint_D xy^2\mathrm{d}\sigma = \int_{-2}^{2} y^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\frac{1}{2}y^2(4-y^2)\mathrm{d}y = \frac{64}{15}.$$

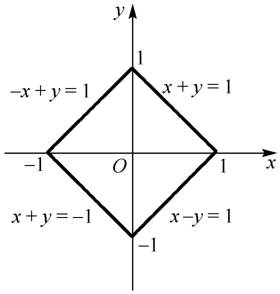


图 10-4

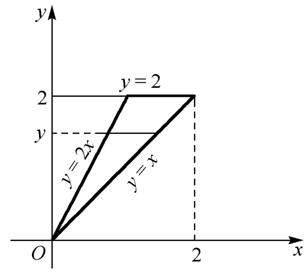


图 10-5

(3) 如图 10-4 所示，$D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)\big|-1\leqslant x\leqslant 0,-x-1\leqslant y\leqslant x+1\}$，$D_2=\{(x,y)\big|0\leqslant x\leqslant 1,x-1\leqslant y\leqslant -x+1\}$．或 $D_1=\{(x,y)\big|0\leqslant y\leqslant 1,y-1\leqslant x\leqslant 1-y\}$，$D_2=\{(x,y)\big|-1\leqslant y\leqslant 0,-y-1\leqslant x\leqslant y+1\}$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma&=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^1\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\int_{-y-1}^{y+1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2y-1})\mathrm{d}y+\int_{-1}^0(\mathrm{e}^{2y+1}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

(4) 如图 10-5 所示, D 可用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant 2$，$\dfrac{y}{2}\leqslant x\leqslant y$，所以

$$\begin{aligned}\iint_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.\end{aligned}$$

3. 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积，即 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$，积分区域 $D=\{(x,y)\big|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$，证明这两个二重积分等于两个单积分的乘积，即 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]$.

证明 $\iint\limits_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y$.

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y$ 中，$f_1(x)$ 与积分变量 y 无关，可作为常数提到积分号外，因此上式右端等于 $\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y$．由于积分上下限为常数，故两个积分相互独立，从而得到

$$\iint_D f_1(x)\cdot f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$

证毕.

4. 化二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2$ $(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域;

(3) 由直线 $y=x$， $x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ ($x>0$)所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域 $\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 如图 10-6 所示, 直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(4,4)$，积分区域 D 为 $\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 4, x\leqslant y\leqslant\sqrt{4x}\right\}$ 或 $\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant 4, y^2/4\leqslant x\leqslant y\right\}$，所以

$$I=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4x}} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x .$$

(2) 将 D 用不等式表示为 $-r\leqslant x\leqslant r$， $0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}$，或表示为 $0\leqslant y\leqslant x$， $-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2}$，于是可将其化为如下的先对 y 后对 x 的二次积分:

$$I=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \text{或} \quad I=\int_0^r\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x .$$

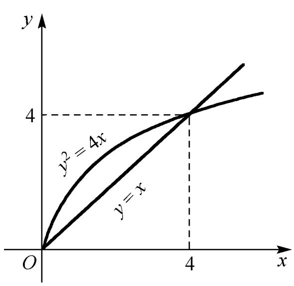


图 10-6

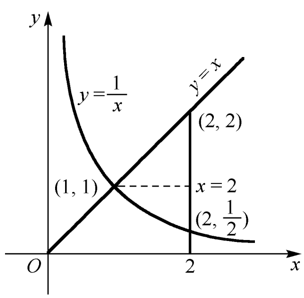


图 10-7

(3) 如图 10-7 所示, 三条边界曲线两两相交, 先求得 3 个交点坐标为 $(1,1)$， $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(2,2)$. 积分区域 D 可表示为

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\right\},$$

或

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1,\frac{1}{y}\leqslant x\leqslant 2\text{且}1\leqslant y\leqslant 2, y\leqslant x\leqslant 2\right\},$$

所以

$$I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y ;$$

或 $$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

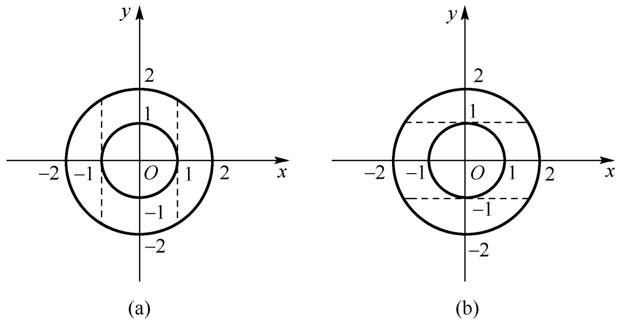


图 10-8

(4) 将 D 按图 10-8(a)和图 10-8(b)所示的两种不同方式划分为 4 块，分别得

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\,,$$

和

$$I=\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=a$ 及 $x=b$ $(b>a)$ 所围成的闭区域，证明

$$\int_{a}^{b}\mathrm{d}x\int_{a}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{a}^{b}\mathrm{d}y\int_{y}^{b}f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

证明　等式两端的二次积分分别是先对 y 后对 x 和先对 x 后对 y 的二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序.

(1) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(5) $\int_{1}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_{0}^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$；　(6) $\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解　(1)如图 10-9 所示，由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y\}$，$D$ 可改写为 $\{(x,y)\,|\,x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$，所以

$$原式 =\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy .$$

(2) 如图 10-10 所示，由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x,y)|y^2\leqslant x\leqslant 2y, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 又 D 可表示为 $\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 4\right\}$，于是

$$原式 =\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy .$$

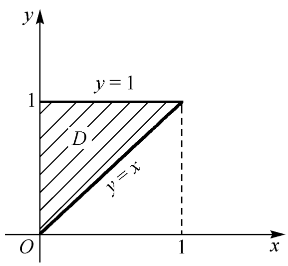


图 10-9

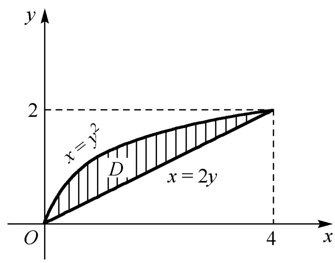


图 10-10

(3) 如图 10-11 所示，由所给积分知积分区域 D 为 $\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$. 又 D 可表示为 $\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1\right\}$，于是

$$原式 =\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy .$$

(4) 如图 10-12 所示，由所给积分知积分区域 D 为 $\left\{(x,y)\middle|2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}, 1\leqslant x\leqslant 2\right\}$. 又 D 可表示为 $\left\{(x,y)\middle|2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$，于是

$$原式 =\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx .$$

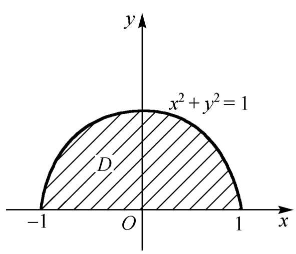


图 10-11

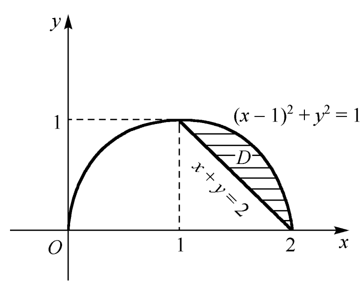


图 10-12

(5) 如图 10-13 所示，由所给积分知积分区域 D 为 $\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant\ln x, 1\leqslant x\leqslant e\}$. 又 D 可表示为 $\{(x,y)|e^y\leqslant x\leqslant e, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，于是

$$原式 =\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx .$$

(6) 如图 10-14 所示, 由所给积分知积分区域 D 为 $\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant \pi,-\sin\dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant \sin x\right\}$, 又当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时 $y=\sin x$ 的反函数是 $x=\arcsin y$. 而当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, $\pi-x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 于是由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 可得 $\pi-x=\arcsin y$, 从而得反函数 $x=\pi-\arcsin y$.

所以 D 可表示为 $D_1\cup D_2$, 其中,

$$D_1=\{(x,y)|\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin y,0\leqslant y\leqslant 1\}\ D_2=\{(x,y)|-2\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi,-1\leqslant y\leqslant 0\}.$$

因此 $$\text{原式}=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)dx$$

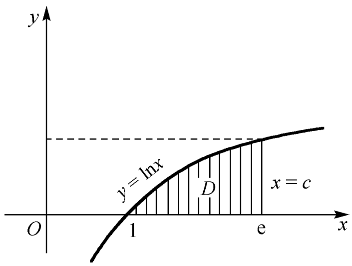


图 10-13

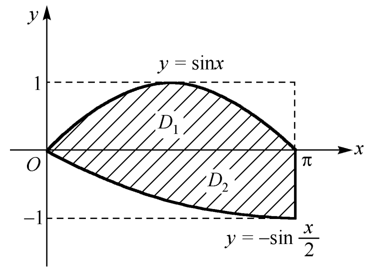


图 10-14

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成, 它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$, 求该薄片的质量.

解 如图 10-15 所示, 积分区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant 2-y\}$,

所以质量 $$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x^2+y^2)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_y^{2-y}dy$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]dy=\frac{4}{3}.$$

8. 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 如图 10-16 所示, 此立体为一曲顶柱体, 它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,$ $0\leqslant y\leqslant 1\}$, 顶是曲面 $z=6-2x-3y$. 所以体积为

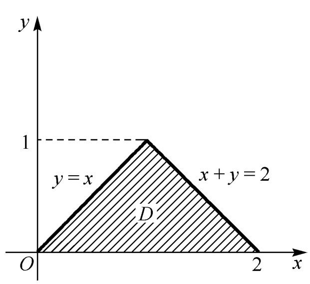


图 10-15

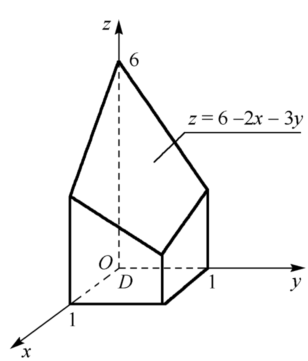


图 10-16

$$V = \iint_D (6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (6-2x-3y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{9}{2}-2x\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0$，$y=0$，$x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解　如图 10-17 所示，此曲顶柱体的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$，顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$，所以体积为

$$V = \iint_D [6-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2)\mathrm{d}y = \frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解　如图 10-18 所示，由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 消去 z，得 $x^2+y^2=2$，所以该立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2\}.$$

该立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差

$$V = \iint_D (6-2x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma - \iint_D (x^2+2y^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D (6-3x^2-3y^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D (6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho = 6\pi.$$

注：求类似于第 8～10 题中这样的立体体积时，并不需要画出立体的准确图形，但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域，并知道立体的底和顶的方程.

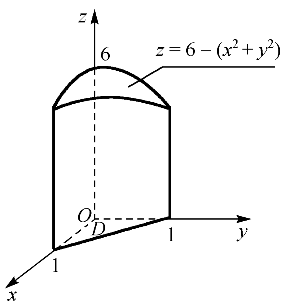


图 10-17

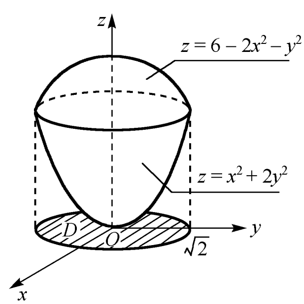


图 10-18

11. 画出积分区域，把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$ $(a>0)$；　　(2) $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$；

(3) $\{(x,y)\,|\,a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$，其中 $0<a<b$；　　(4) $\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

解　(1)如图 10-19 所示，在极坐标系中，最小的 ρ 在积点取为 $\rho=0$，最大的 ρ 在圆周

$x^2+y^2=a^2$ 上取为 $\rho=a$，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\ .$$

(2) 如图 10-20 所示，在极坐标系中易知 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta$．所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\ .$$

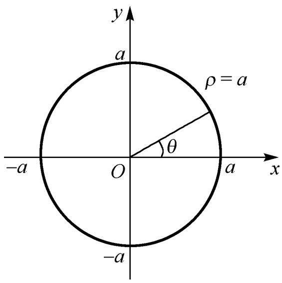


图 10-19

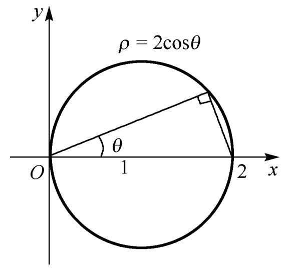


图 10-20

(3) 如图 10-21 所示，在极坐标系中易知 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，最小的 ρ 在圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上取为 $\rho=a$，最大的 ρ 在圆周 $x^2+y^2=b^2$ 上取为 $\rho=b$，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\ .$$

(4) 如图 10-22 所示，在极坐标系中易知 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，最小的 ρ 在积点取为 $\rho=0$，最大的 ρ 在直线 $x+y=1$ 上取，即 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$，所以最大的 ρ 为 $\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\ .$$

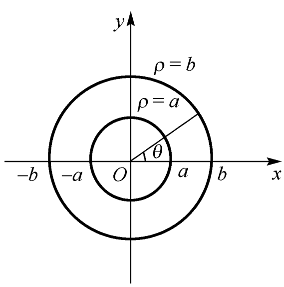


图 10-21

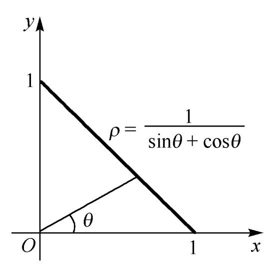


图 10-22

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$; (4) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$;

解 (1) 如图 10-23 所示，由所给积分知，积分区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，最小的 ρ 在积点取为 $\rho=0$，最大的 ρ 在直线 $y=1$ 和 $x=1$ 上取，为两条直线，所以用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分：

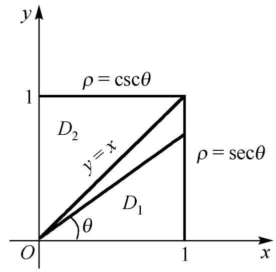


图 10-23

$$D_1=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\right\};$$

$$D_2=\left\{(\rho,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta\right\}.$$

所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 如图 10-24 所示，在极坐标系中易知 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$， $0\leqslant\rho\leqslant 2\sec\theta$，所以原式等于

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(3) 如图 10-25 所示，由所给积分知，积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1, 1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$，最小的 ρ 在直线 $y=1-x$ 上取为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，最大的 ρ 在圆周上取为 $\rho=1$，所以原式等于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) 如图 10-26 所示，在极坐标系中易知 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$， $\tan\theta\dfrac{1}{\cos\theta}\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\cos\theta}$，所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

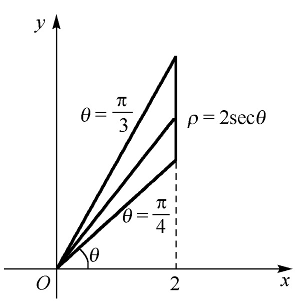


图 10-24

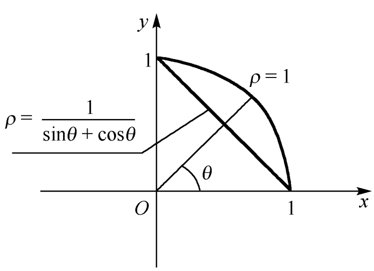


图 10-25

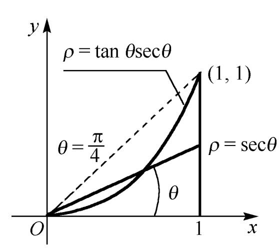


图 10-26

13. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值.

(1) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_0^{a}\mathrm{d}x\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$；　　(4) $\int_0^{a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

解 (1) 如图 10-27 所示，在极坐标系中易知$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta$.

所以原式等于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\pi a^4 .$$

(2) 如图 10-28 所示，在极坐标系中易知$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{\cos\theta}$. 所以

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta ,$$

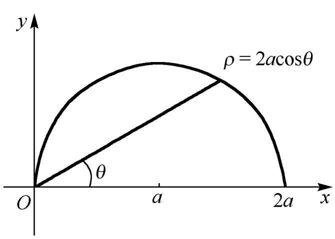


图 10-27

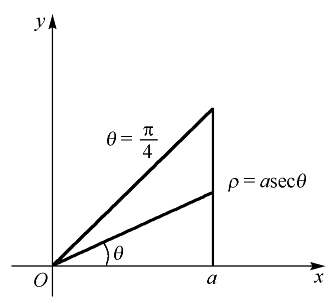


图 10-28

又
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta=[\sec\theta\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2-1)\sec\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta .$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+[\ln(\sec\theta+\tan\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}})=\frac{1}{2}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

所以原式等于$\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$.

(3) 如图 10-29 所示，在极坐标系中易知$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\cdot\sec\theta$. 所以

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta=[\sec\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1 .$$

(4) 由所给积分知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2-y^2}$，$0 \leqslant y \leqslant a$．在极坐标系中易知，$0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqslant \rho \leqslant a$．所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8} a^4 .$$

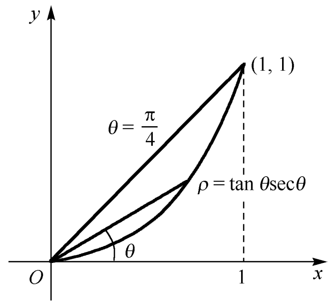


图 10-29

14. 利用极坐标计算下列各题.

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2) \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \rho \leqslant 2$．所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2} \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{e}^{\rho^2} \cdot \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{e}^{\rho^2} \cdot \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{\mathrm{e}^{\rho^2}}{2} \right]_0^2 = \pi(\mathrm{e}^4 - 1) .$$

(2) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqslant \rho \leqslant 1$．所以

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2) \mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_D \ln(1+\rho^2) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \mathrm{d}(1+\rho^2) = \frac{\pi}{4} \left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho \mathrm{d}\rho \right] \\ &= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1) . \end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中易知积分区域 D 可用不等式表示为 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$，$1 \leqslant \rho \leqslant 2$，$\arctan\dfrac{y}{x} = \theta$，所以

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x} \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \theta \cdot \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \mathrm{d}\theta \int_1^2 \rho \mathrm{d}\rho = \frac{3}{64}\pi^2 .$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题.

(1) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2) \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a$ $(a>0)$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆环闭区域 $\{(x,y)\big|a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2\}$.

解 (1) 如图 10-30 所示，根据 D 的形状，选用直角坐标比较合适.

$D=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x\leqslant 2,\dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\right\}$，所以

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标比较合适.

$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$，所以原式等于

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho-\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho^2+\frac{\pi}{8}\cdot\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}(1-\rho^4)\\&=\frac{\pi}{4}\arcsin\rho^2\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}\sqrt{1-\rho^4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}(\pi-2).\end{aligned}$$

(3) 如图 10-31 所示，根据积分区域 D 的形状，选用直角坐标比较合适. 又根据 D 的边界曲线情况，适合采用先对 x 后对 y 的积分次序. 所以

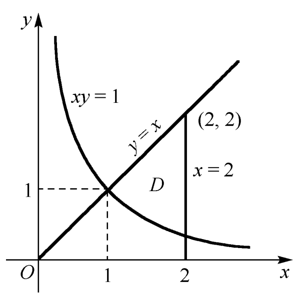


图 10-30

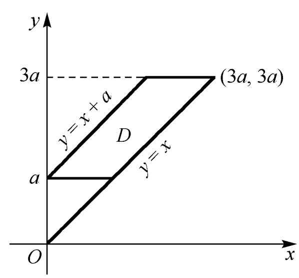


图 10-31

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x=14a^4.$$

(4) 根据积分区域 D 的形状，选用极坐标比较合适. 积分区域 D 可用不等式表示为 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$a\leqslant\rho\leqslant b$. 所以

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上的一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求该薄片的质量.

解　如图 10-32 所示，由二重积分的几何意义知薄片的质量为

$$M=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0$，$y=kx(k>0)$，$z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解　如图 10-33 所示，由二重积分的几何意义知

$$V=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^a\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{1}{2}a\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)=\frac{a}{3}R^3=\frac{R^3}{3}\arctan k.$$

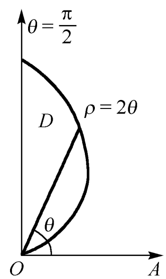


图 10-32

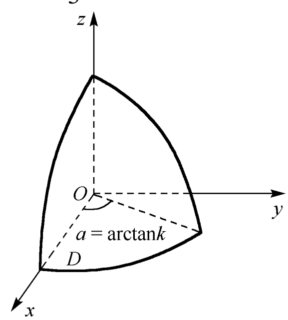


图 10-33

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解　如图 10-34 所示，由于曲顶柱体关于 xOz 面对称，所以选择 xOy 面上第一象限的半圆形区域为积分区域，即积分区域 D 可用不等式表示为 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}$．根据积分区域和被积函数的特点，本题适合选用极坐标，用解不等式的方法解出积分区域 D 的范围为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta$．

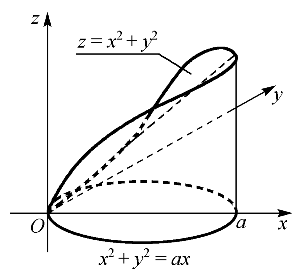


图 10-34

所以体积

$$V=2\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{32}\pi a^4.$$

***19**. 作适当的变换，计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是平行四边形闭区域，它的四个顶点是 $(\pi,0)$，$(2\pi,\pi)$，$(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$；

(2) $\iint\limits_{D} x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴 y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$.

解 (1) 如图 10-35 所示，令 $\mu=x-y,\nu=x+y$，则 $x=\frac{\mu+\nu}{2}$，$y=\frac{\nu-u}{2}$. 在此变换下，D 的边界 $x-y=-\pi$, $x+y=\pi$, $x+y=3\pi$ ， $x-y=\pi$ 依次与 $\mu=-\pi$, $\nu=\pi$, $\nu=3\pi$, $\mu=\pi$ 对应. 于是

$$D'=\{(\mu,\nu)|-\pi\leqslant\mu\leqslant\pi,\pi\leqslant\nu\leqslant 3\pi\},$$

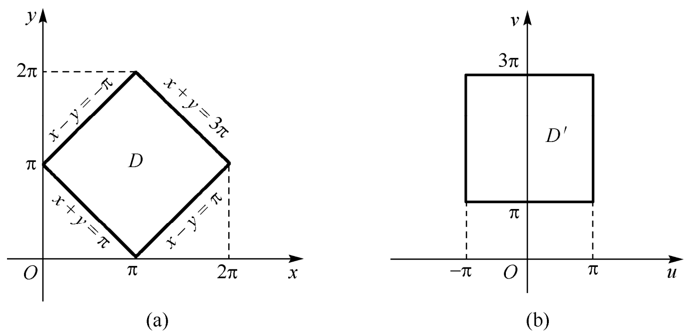


图 10-35

又 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$，所以

$$\iint\limits_{D}(x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\mu^2\sin^2\nu\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mu^2\mathrm{d}\mu\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2\nu\mathrm{d}\nu=\frac{\pi^4}{3}.$$

(2) 如图 10-36 所示，令 $u=xy$，$v=\frac{y}{x}$，则 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$，$y=\sqrt{uv}$.

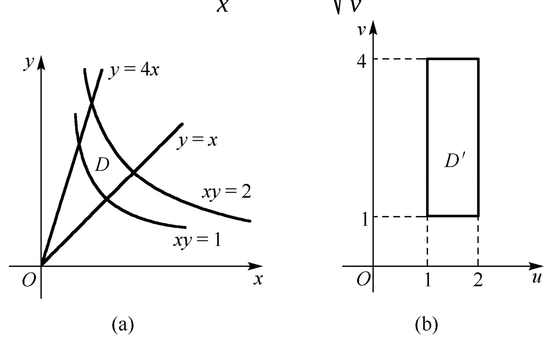


图 10-36

在该变换下，D 的边界 $xy=1$，$y=x$，$xy=2$，$y=4x$ 依次与 $u=1$，$v=1$，$u=2$，$v=4$ 对应. 所以 $D'=\{(u,v)|1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}$.

又 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}\\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{v}\right)=\dfrac{1}{2v}$. 所以

$$\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}u^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{7}{3}\ln 2\,.$$

(3) 令 $\mu=x-y$，$\nu=y$，则 $x=u-v$，$y=v$. 在该变换下，D 的边界 $y=0$，$x=0$，$x+y=1$ 依次与 $v=0$，$u=v$，$\mu=1$ 对应. 所以

$$D'=\{(\mu,\nu)|0\leqslant\mu\leqslant 1,0\leqslant\nu\leqslant u\}\,.$$

又 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$. 所以

$$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\,.$$

(4) 作广义极坐标变换 $\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$，$(a>0,b>0,\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 在该变换下，与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)|0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=ab\rho\,.$$

因此 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\rho^2\cdot ab\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}ab\pi$.

***20**. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积.

(1) D 是由曲线 $xy=4$，$xy=8$，$xy^3=5$，$xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域;

(2) D 是由曲线 $y=x^3$，$y=4x^3$，$x=y^3$，$x=4y^3$ 所围成的第一象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy$，$v=xy^3$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，则 $x=\sqrt{u^3/v}$，$y=\sqrt{u/v}$. 在该变换下，与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(\mu,\nu)|4\leqslant\mu\leqslant 8,5\leqslant\nu\leqslant 15\}$.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}=\begin{vmatrix}\dfrac{3}{2}\sqrt{u/v} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{u^3/v^3}\\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{v/u^3} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}\,,$$

所以所求面积为

$$A=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{v}\mathrm{d}v=2\ln 3\,.$$

(2) 令 $u=\dfrac{y}{x^3}$，$v=\dfrac{x}{y^3}$ $(x>0,y>0)$，则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}}$，$y=u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$. 在该变换下，与 D 对应的

uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(\mu,\nu)|1\leqslant\mu\leqslant 4,1\leqslant\nu\leqslant 4\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}}\\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

所以所求面积为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v=\frac{1}{8}.$$

***21**. 设闭区域 D 由直线 $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 所围成, 求证 $\iint\limits_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 1$.

证明 如图 10-37 所示, 令 $u=x-y$, $v=x+y$, 则 $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{v-u}{2}$. 在该变换下, D 的边界 $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ 依次与 $v=1$, $u+v=0$, $v-u=0$ 对应.

于是 $D'=\{(\mu,\nu)|-\nu\leqslant\mu\leqslant\nu,0\leqslant\nu\leqslant 1\}$. 又

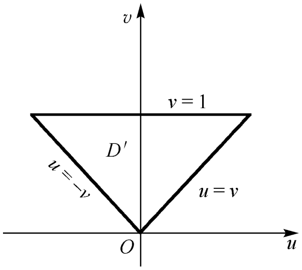


图 10-37

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\iint_D\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\mathrm{d}u=\int_0^1\sin 1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\sin 1.$$

***22**. 选取适当的变换, 证明下列等式.

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$, 其中闭区域 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 且 $a^2+b^2\neq 0$.

证明 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1$, $x+y=1$, $x-y=-1$, $x-y=1$, 令 $u=x+y$, $v=x-y$, 即 $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$. 在该变换下, D 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D'=\{(\mu,\nu)|-1\leqslant\mu\leqslant 1,-1\leqslant\nu\leqslant 1\}.$$

又 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(u)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u .$$

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2}=ax+by,\ 即\ u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

又 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$，所以令 $v=\dfrac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 因此有 $u^2+v^2=1$，故与 D 对应的闭区域为

$$D'=\{(u,v)\big|u^2+v^2\leqslant 1\}.$$

又由 u 、 v 的表达式可解得

$$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-1,$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)|-1|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}v\\&=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u .\end{aligned}$$

习题 10-3

三重积分

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$ ， $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$， $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid\ 0\leqslant z\leqslant xy, 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

(2) 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是
$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是
$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

提示: 曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=2-x^2$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线为 $x^2+y^2=1$.

(4) 积分区域可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant z\leqslant\frac{xy}{c},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant a\right\},$$

于是
$$I=\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

提示: 区域 Ω 的上边界曲面为曲面 $cz=xy$, 下边界曲面为平面 $z=0$.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$, 在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$, 计算该物体的质量.

解
$$M=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y\right]_0^1\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x)$、$f_2(y)$、$f_3(z)$ 的乘积, 即 $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$, 积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,l\leqslant z\leqslant m\}$, 证明这个三重积分等于三个单积分的乘积, 即

$$\iiint_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z.$$

证明
$$\iiint_{\Omega}f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left[\int_c^d\left(f_1(x)f_2(y)\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\left(f_1(x)\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\left(\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\left[\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\left(\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right)f_1(x)\right]\mathrm{d}x=\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\left(\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right)\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z.$$

4. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解　积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant z\leqslant xy,0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{xy}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^5\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

5. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解　积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant z\leqslant 1-x-y,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right]\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

提示:
$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{-2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left[\frac{1}{-2(1+x+y)}-\frac{1}{8}y\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{2(1+x)}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

6. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解　积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2},\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{8}x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

7. 计算$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由平面$z=0$，$z=y$，$y=1$及抛物柱面$y=x^2$所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant z\leqslant y,\ x^2\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 1\},$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^y z\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}x(1-x^6)\mathrm{d}x=0.$$

8. 计算$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h(R>0,h>0)$所围成的闭区域.

解 当$0\leqslant z\leqslant h$时，过$(0,0,z)$作平行于面xOy的平面，截得立体Ω的截面为圆D_z：$x^2+y^2=\left(\frac{R}{h}z\right)^2$，故$D_z$的半径为$\frac{R}{h}z$，面积为$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2=2z$及平面$z=2$所围成的闭区域.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\ \rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^5)\mathrm{d}\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

(2) 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ \frac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2,$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5\right)\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\pi.$$

***10**. 利用球面坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=1$所围成的闭区域;

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2 \leqslant a^2$， $x^2+y^2 \leqslant z^2$ 所确定.

解 (1) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} r^4 \cdot \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi$$
$$= 8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$, $z=0$, $x=0$, $y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域;

*(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

*(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant A$， $z \geqslant 0$ 所确定.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$$

另解: 用直角坐标计算

$$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

*(2) 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{10}.$$

(3) 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ \frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^{5}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho=8\pi.$$

*(4) 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ a\leqslant r\leqslant A,$$

于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^4\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积.

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

*(2) $x^2+y^2+z^2=2az\ (a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 (1) 在柱面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 2, \rho\leqslant z\leqslant 6-\rho^2,$$

于是
$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{6-\rho^2}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^2(6\rho-\rho^2-\rho^3)\mathrm{d}\rho=\frac{32}{3}\pi.$$

*(2) 在球面坐标下积分区域Ω可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,$$

于是
$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\pi a^3 .$$

(3) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 1, \rho^2\leqslant z\leqslant\rho,$$

于是 $$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1(\rho^2-\rho^3)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

(4) 在柱面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ \frac{1}{4}\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{5-\rho^2}\ ,$$

于是 $$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{4}\rho^2}^{\sqrt{5-\rho^2}}\mathrm{d}z\ =2\pi\int_0^2\rho\left(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4) .$$

***13**. 求球体 $r\leqslant a$ 位于锥面 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域, 有

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\mathrm{d}r\ =\frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z, 解得 $x^2+y^2=1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 1$, 于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leqslant 1\} .$$

因此 $$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v\ =\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \text{（用极坐标）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi .$$

注: 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果:

$$V=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_0^1 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi\ =\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi .$$

*15. 球心在原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的密度的大小与该点到球心的距离成正比，求该球体的质量.

解 密度函数为 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在球面坐标下积分区域 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant R,$$

于是
$$M=\iiint_{\Omega}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}kr\cdot r^2\mathrm{d}r=k\pi R^4 .$$

习题 10-4

重积分的应用

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 位于柱面内的部分球面有两块，其面积是相同的.

由曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

于是
$$A=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z^2=2x$ 两式消去 z 得 $x^2+y^2=2x$，于是所求曲面在 xOy 面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant 2x$.

由曲面方程 $\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 于是

$$A=\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi .$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 设 A_1 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 相应于区域 D: $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上的面积. 则所求表面积为 $A=4A_1$.

$$A=4\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_D\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4R\int_{-R}^{-R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y=8R\int_{-R}^{-R}\mathrm{d}x=16R^2 .$$

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下，求均匀薄片的质心.

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域$\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ y\geqslant 0\right\}$；

(3) D 是介于两个圆 $\rho=a\cos\theta,\rho=b\cos\theta\left(0<a<b\right)$ 之间的闭区域.

解 (1) 令密度为$\mu=1$.

因为区域 D 可表示为 $0\leqslant x\leqslant x_0$，$0\leqslant y\leqslant\sqrt{2px}$，所以

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}x\sqrt{2px}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}x_0,$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_0^{x_0}px\mathrm{d}x=\frac{3}{8}y_0,$$

故所求质心为$\left(\dfrac{3}{5}x_0,\ \dfrac{3}{8}y_0\right)$.

(2) 令密度为 $\mu=1$. 因为闭区域 D 对称于 y 轴，所以 $\overline{x}=0$.

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi ab \text{（椭圆的面积）},$$

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y=\frac{1}{A}\cdot\frac{b^2}{2a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4b}{3\pi},$$

所求质心为$\left(0,\ \dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

(3) 令密度为 $\mu=1$. 由对称性可知 $\overline{y}=0$.

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2) \text{（两圆面积的差）},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\mathrm{d}\rho=\frac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)},$$

所求质心是$\left(\dfrac{a^2+b^2+ab}{2(a+b)},\ 0\right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$，求该薄片的质心.

解 $$M=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{35},$$

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{M}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^3y\mathrm{d}y=\frac{1}{M}\int_0^1\frac{1}{2}(x^5-x^7)\mathrm{d}x=\frac{35}{48},$$

$$\overline{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{M}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{M}\int_0^1\frac{1}{3}(x^5-x^8)\mathrm{d}x=\frac{35}{54},$$

质心坐标为$\left(\dfrac{35}{48},\ \dfrac{35}{54}\right)$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片，腰长为 a，各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方，求该薄片的质心.

解 建立坐标系，使薄片在第一象限，且直角边在坐标轴上．薄片上点 (x,y) 处的函数为 $\mu = x^2 + y^2$．由对称性可知 $\overline{x} = \overline{y}$.

$$M = \iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{6}a^4,$$

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{M}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y = \frac{2}{5}a,$$

薄片的质心坐标为 $\left(\frac{2}{5}a,\ \frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围成立体的质心（设密度 $\rho = 1$）.

(1) $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$;

*(2) $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$， $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,(A > a > 0), z = 0$;

(3) $z = x^2 + y^2$， $x + y = a$， $x = 0$， $y = 0$， $z = 0$.

解 (1) 由对称性可知，质心在 z 轴上，故 $\overline{x} = \overline{y} = 0$.

$$V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v = \frac{1}{3}\pi \text{（圆锥的体积）},$$

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 z\mathrm{d}z = \frac{3}{4},$$

所求立体的质心为 $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right)$.

*(2) 由对称性可知，质心在 z 轴上，故 $\overline{x} = \overline{y} = 0$.

$$V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v = \frac{2}{3}\pi A^3 - \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3) \text{（两个半球体体积的差）},$$

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega r^3\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^A r^3\mathrm{d}r = \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},$$

所求立体的质心为 $\left(0,\ 0,\ \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)}\right)$.

(3)
$$V = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^a\left[x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^4,$$

$$\overline{x} = \frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}v = \frac{1}{V}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z = \frac{\frac{1}{15}a^5}{\frac{1}{6}a^4} = \frac{2}{5}a,$$

$$\overline{y} = \overline{x} = \frac{2}{5}a,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{7}{30}a^2,$$

所以立体的质心为$\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

***8.** 设球体占有闭区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$，它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方，试求该球体的质心.

解 球体密度为$\rho=x^2+y^2+z^2$. 由对称性可知质心在z轴上，即$\overline{x}=\overline{y}=0$.

在球面坐标下Ω可表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi$，于是

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}R^5\sin\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\overline{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{6}R^6\sin\varphi\cos^7\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\frac{8}{3}\pi R^6}{\frac{32}{15}\pi R^5}=\frac{5}{4}R,$$

故球体的质心为$\left(0,\ 0,\ \frac{5}{4}R\right)$.

9. 设均匀薄片（面密度为常数 1）所占闭区域D如下，求指定的转动惯量.

(1) $D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$，求$I_y$；

(2) D由抛物线$y^2=\frac{9}{2}x$与直线$x=2$所围成，求I_x和I_y；

(3) D为矩形闭区域$\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b\}$，求$I_x$和$I_y$.

解 (1) 积分区域D可表示为

$$-a\leqslant x\leqslant a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{a}\sqrt{a-x^2},$$

于是 $$I_y=\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^3b.$$

提示：$\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sin t}\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}a^4$.

(2) 积分区域D可表示为

$$0\leqslant x\leqslant 2,\ -3\sqrt{x/2}\leqslant y\leqslant 3\sqrt{x/2},$$

于是 $$I_x=\iint\limits_{D}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}}y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^2\frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{72}{5},$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \mathrm{d}x \int_{-3\sqrt{x/2}}^{3\sqrt{x/2}} \mathrm{d}y = \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^2 x^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}x = \frac{96}{7}.$$

(3)
$$I_x = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b y^2 \mathrm{d}y = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{ab^3}{3},$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a x^2 \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y = \frac{1}{3} a^3 \cdot b = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板（面密度为常量 μ）的长和宽分别为 b 和 h，计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 取形心为原点, 取两旋转轴为坐标轴, 建立坐标系.

$$I_x = \iint_D y^2 \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{12} \mu b h^3,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \mathrm{d}x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度 ρ 为常量)占有的闭区域 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, |x| = a, |y| = a$ 所围成. (1) 求物体的体积; (2) 求物体的质心; (3) 求物体关于 z 轴的转动惯量.

解 (1) 由对称可知

$$V = 4\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z$$

$$= 4\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x^2 + y^2) \mathrm{d}y = 4\int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3} a^4.$$

(2) 由对称性知 $\overline{x} = \overline{y} = 0$.

$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega \rho z \mathrm{d}v = \frac{4}{V} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} z \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{V} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{V} \int_0^a \left(ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{a^5}{5} \right) \mathrm{d}x = \frac{7}{15} a^2.$$

(3)
$$I_z = \iiint_\Omega \rho (x^2 + y^2) \mathrm{d}v = 4\rho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) \mathrm{d}z$$

$$= 4\rho \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) \mathrm{d}y = 4\rho \frac{28}{45} a^6 = \frac{112}{45} \rho a^6.$$

12. 求半径为 a 、高为 h 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量（设密度 $\mu = 1$）.

解 建立坐标系, 使圆柱体的底面在 xOy 面上, z 轴通过圆柱体的轴心. 用柱面坐标计算.

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) \mathrm{d}v = \iiint_\Omega r^3 \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^3 \mathrm{d}r \int_0^h \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \pi h a^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的质量均匀的半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,\ y,\ 0)\,|\,R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2,\ x\geqslant 0\}$，求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 F .

解 引力 $F=(F_x,F_y,F_z)$，由对称性，$F_y=0$，而

$$F_x=G\iint\limits_D\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2G\mu\left[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right],$$

$$F_z=-Ga\iint\limits_D\frac{\mu\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=-Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=\pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right].$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性可知，沿 x 轴与 y 轴方向的分力互相抵消，故 $F_x=F_y=0$，而

$$F_z=-\iiint\limits_\Omega G\rho\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v$$

$$=-G\rho\int_0^h(a-z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=-G\rho\int_0^h(a-z)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi G\rho[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

习题 10-5

含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\int_0^{1+0}\frac{\mathrm{d}y}{1+0+y^2}=[\arctan y]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1|y|\mathrm{d}y=2\int_0^1 y\mathrm{d}y=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 y^2\cos(0)\mathrm{d}y=\dfrac{8}{3}$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $\phi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\mathrm{d}y$;　　(2) $\phi(x)=\int_0^x\dfrac{\ln(1+xy)}{y}\mathrm{d}y$;

(3) $\phi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y$;　　(4) $\phi(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$.

解 (1) $\phi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\mathrm{d}y+(\cos^2 x\sin x-\cos^3 x)(\cos x)'-(\sin^2 x\sin x-\sin^3 x)(\sin x)'$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos^3 x-\sin^3 x)+(\cos x-\sin x)\sin x\cos^2 x$$

$$=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).$$

(2) $\phi'(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+xy}\mathrm{d}y+\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\dfrac{1}{x}[\ln(1+xy)]_0^x+\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\dfrac{2}{x}\ln(1+x^2)$.

(3) $\phi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y+\arctan x^2\cdot 3x^2-\arctan x\cdot 2x$

$$=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x$$

$$=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.$$

(4) $\phi'(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-xy^2}(-y^2)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-x^5}\cdot 2x-\mathrm{e}^{-x^3}\cdot 1=2x\mathrm{e}^{-x^5}-\mathrm{e}^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2\mathrm{e}^{-xy^2}\mathrm{d}y$.

3. 设 $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}y$, 其中 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

解 $F'(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y+2xf(x)$;

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分.

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}(|a|<1)$;　　(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x(a>0)$.

解 (1) 设 $\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, 则 $\varphi(0)=0$, $\varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x},$$

故
$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\tan x}{\sec^2 x-\alpha^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{(1-\alpha^2)+\tan^2 x}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

于是 $$I=\varphi(a)-\varphi(0)=\int_0^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha=\pi\arcsin a.$$

(2) 设 $\varphi(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2x+a^2\sin^2x)\mathrm{d}x$，则 $\varphi(1)=0$，$\varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln(\cos^2x+\alpha^2\sin^2x)]=\frac{2\alpha\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x},$$

故 $$\varphi'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2x}{\cos^2x+\alpha^2\sin^2x}\mathrm{d}x\xlongequal{\mu=\tan x}2\alpha\int_0^{-\infty}\frac{\mu^2}{1+\alpha^2\mu^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{1+\mu^2}$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{1+\mu^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{1+\alpha^2\mu^2}\right](\alpha\neq1)$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1};$$

又当 $\alpha=1$ 时，$\varphi'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a>0$，$\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1,a]$（或 $[a,1]$）上连续. 于是

$$I=\varphi(a)-\varphi(1)=\int_1^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_1^a\frac{\pi}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha=\pi\ln\frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分.

(1) $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\,(0<a<b)$

解 (1) 因为 $\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}$，故

$$\text{原式}=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right]\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad\text{（交换积分次序）}$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}y,$$

由于 $$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2t}$$

$$\xlongequal{\mu=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{1+(1+y^2)\mu}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}[\arctan(\sqrt{1+y^2})\mu]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$$

因此 $$\text{原式}=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\left[\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 因为 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$，故

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y \text{（交换积分次序）}$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x .$$

由于 $$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^{-t}} \int_{-\infty}^0 \sin t\cdot\mathrm{e}^{-yt}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot\mathrm{e}^{-(y+1)t}\mathrm{d}t \text{（分部积分）}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{e}^{-(y+1)t}[\cos t-(y+1)\sin t]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此 $$\text{原式}=\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y=[\arctan(y+1)]_a^b$$

$$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1) .$$

总 习 题 十

1. 填空.

(1) 积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值是____________;

(2) 设闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

解 (1) 交换积分次序并计算所得的二次积分，得

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

(2) 用极坐标计算. $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos2\theta}{2b^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

2. 以下各题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论.

(1) 设有空间闭区域

$\varOmega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$，$\varOmega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$,

则有________.

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$;　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$;

C. $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$;　　D. $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$, $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$, 则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　B. $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

C. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　D. 0.

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)=$________.

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

解 (1) C. 提示: $f(x,y,z)=x$ 是关于 x 的奇函数, 它在关于 yOz 平面对称的区域 Ω_1 上的三重积分为零, 而在 Ω_2 上的三重积分不为零, 所以 A 是错的. 类似地, B 和 D 也是错的. $f(x,y,z)=z$ 是关于 x 和 y 的偶函数, 它关于 yOz 平面和 zOx 面都对称的区域 Ω_1 上的三重积分可以化为 Ω_1 在第一卦限部分 Ω_2 上的三重积分的四倍.

(2) A. 记 D 的三个顶点为 $A(a,a)$, $B(-a,a)$, $C(-a,-a)$. 连接 O、B, 则 D 为$\triangle COB$ 和$\triangle BOA$ 之并. 由于$\triangle COB$ 关于 x 轴对称, $\triangle AOB$ 关于 y 轴对称, 而函数 xy 关于 y 和 x 均是奇函数, 从而有

$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle AOB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle COB} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+0=0,$$

又由于函数 $\cos x\sin y$ 关于 y 是奇函数, 关于 x 是偶函数, 从而有

$$\iint\limits_{D}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle COB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle AOB}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此应选 A.

(3) B. 解法一. 由于考虑 $F'(2)$, 故可设 $t>1$. 对所给二重积分交换积分次序, 得

$$F(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x \mathrm{d}y = \int_1^t (x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

于是, $F'(t)=(t-1)f(t)$, 从而有 $F'(2)=f(2)$. 故选 B.

解法二. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$, 则有

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x = \int_1^t [G(t)-G(y)]\mathrm{d}y = G(t)\int_1^t \mathrm{d}y - \int_1^t G(y)\mathrm{d}y = (t-1)G(t)-\int_1^t G(y)\mathrm{d}y.$$

求导得

$$F'(t)=G(t)+(t-1)f(t)-G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2)=f(2).$$

3. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0),(1,0)$，$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi\}$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

解 (1) 积分区域可表示为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x+1\}$，于是

$$\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x\int_0^{x+1}\sin y\mathrm{d}y=\int_0^1 (1+x)[1-\cos(x+1)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}+\cos 1+\sin 1-\cos 2-2\sin 2.$$

(2) $$\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left(x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

(3) 在极坐标下积分区域 D 可表示为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta,$$

于是 $$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{r\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta=\frac{2R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{9}(3\pi-4)R^3.$$

(4) 因为积分区域 D 关于 x 轴、y 轴对称，所以

$$\iint\limits_D 3x\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D 6y\mathrm{d}\sigma=0.$$

$$\iint\limits_D 9\mathrm{d}\sigma=9\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=9\pi R^2.$$

因为 $$\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

所以 $$\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma=9\pi R^2+\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=9\pi R^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=9\pi R^2+\frac{\pi}{4}R^4.$$

4. 交换下列二次积分的次序.

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

解 (1) 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 4,\ -\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}(y-4)\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,-2\leqslant x\leqslant 0, 2x+4\leqslant y\leqslant -x^2+4\},$$

所以 $$\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)dx=\int_{-2}^0 dx\int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x,y)dy .$$

(2) 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 2y\}\cup\{(x,y)\,|\,1\leqslant y\leqslant 3, 0\leqslant x\leqslant 3-y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,\ \frac{1}{2}x\leqslant y\leqslant 3-x\},$$

所以 $$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy .$$

(3) 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant y^2\}\cup\{(x,y)\,|\,1\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt{2y-y^2}\},$$

所以 $$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx .$$

5. 证明 $\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx$.

证明 积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant x\leqslant y\},$$

并且 D 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\},$$

所以 $$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)} f(x)dy=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)dx .$$

6. 把积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

解 在极坐标下积分区域可表示为 $D=D_1+D_2+D_3$，其中

$$D_1:\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta ,$$

$$D_2:\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,$$

$$D_3:\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,$$

所以
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

7. 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$ 上连续，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $f(x,y)$.

解 设 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，则

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$

从而
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又 $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=D$ 的面积 $=\dfrac{\pi}{8}$，故得

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A,$$

因此
$$A=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在极坐标中,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

因此
$$\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9},$$

于是得
$$A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}.$$

从而
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}.$$

8. 把积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分，其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^3,y=x^2$ 及平面 $y=1,z=0$ 所围成的闭区域.

解 积分区域可表示为

$$\Omega: 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2, x^2 \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

所以 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

9. 计算下列三重积分.

(1) $\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz(z>0)$ 的公共部分;

(2) $\iiint_{\Omega} \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v$, 其中 Ω 是由 xOy 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 两球面的公共部分在 xOy 面上的投影 $x^2+y^2 \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$, 在柱面坐标下积分区域可表示为

$$\Omega:\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}R,\ R-\sqrt{R^2-\rho^2} \leqslant z \leqslant R\sqrt{R^2-\rho^2},$$

所以 $$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\mathrm{d}\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2\rho\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3]\rho\mathrm{d}\rho = \frac{59}{480}\pi R^5 .$$

(2) 因为积分区域 Ω 关于 xOy 面对称, 而被积函数为关于 z 的奇函数, 所以

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v = 0 .$$

(3) 曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2+z^2=2x$. 由曲面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域 Ω 在 yOz 面上的投影区域为

$$D_{yz}:\ y^2+z^2 \leqslant (\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为

$$D_{yz}:\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{10},\ \frac{1}{2}\rho^2 \leqslant x \leqslant 5,$$

所以 $$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{5}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{1}{2}\rho^2\right)\mathrm{d}\rho = \frac{250}{3}\pi .$$

***10**. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标,

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

利用极坐标,

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r.$$

于是

$$F(t)=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

求导得

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在区间 $(0,+\infty)$ 内，$F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(2) **证明** 因为 $f(x^2)$ 为偶函数，故

$$\int_{-t}^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r.$$

所以

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}.$$

要证明 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$，即证

$$\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}>\frac{2\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r},$$

只需证当 $t>0$ 时，$H(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$.

由于 $H(0)=0$，且

$$H'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0,$$

所以 $H(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，又 $H(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故当 $t>0$ 时，

$$H(t) > H(0) = 0 .$$

因此当$t > 0$时，有

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t) \quad .$$

11. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解　平面的方程可写为$z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$，所割部分在$xOy$面上的投影区域为

$$D = \{(x,y) \mid \frac{x}{a}+\frac{y}{b} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\},$$

于是

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}ab\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}} .$$

12. 在均匀的半径为 R 的半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

解　设所求矩形另一边的长度为 H，建立坐标系，使半圆的直径在 x 轴上，圆心在原点. 不妨设密度为$\rho = 1\mathrm{g/cm}^3$.

由对称性及已知条件可知$\bar{x} = \bar{y} = 0$，即

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

从而

$$\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-H}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\mathrm{d}y = 0,$$

即

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}[(R^3-x^2)-H^2]\mathrm{d}x = 0,$$

亦即

$$R^3 - \frac{1}{3}R^2 - RH^2 = 0,$$

从而

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}R .$$

因此，接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为$\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

13. 求曲抛物线$y = x^2$及直线$y = 1$所围成的均匀薄片（面密度为常数μ）对于直线$y = -1$的转动惯量.

解　抛物线$y = x^2$及直线$y = 1$所围成区域可表示为

$$D = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\},$$

所求转动惯量为

$$I=\iint\limits_D \mu(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y+1)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\mu\int_{-1}^{1}[8-(x^2+1)^3]\mathrm{d}x=\frac{368}{105}\mu .$$

14. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片，占有平面闭域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0\},$$

过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$．求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 设 P 点的坐标为 $(0,0,a)$．薄片的面密度为 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$．

设所求引力为 $F=(F_x,F_y,F_z)$．

由于薄片关于 y 轴对称，所以引力在 x 轴上的分量 $F_x=0$，而

$$F_y=G\iint\limits_D\frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=m\mu G\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=m\mu G\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho=2m\mu G\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right),$$

$$F_z=-G\iint\limits_D\frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=-m\mu Ga\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=-\pi m\mu Ga\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho=-\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).$$

15. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\varOmega=\left\{(x,y,z)\mid \dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}$ 的质心.

解 设质心为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由对称性知质心位于 z 轴上，即 $\overline{x}=\overline{y}=0$．由于

$$\iiint\limits_{\varOmega}z\mathrm{d}v=\int_0^b z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\text{其中}D_z=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2(1-\frac{z^2}{b^2})\right\})$$

$$=\int_0^b\pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)z\mathrm{d}z$$

$$=\pi a^2\int_0^b\left(z-\frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi a^2b^2}{4},$$

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^2b=\frac{2\pi a^2b}{3},$$

因此 $\overline{z}=\dfrac{\frac{\pi a^2b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2b}{3}}=\dfrac{3b}{8}$，即质心为 $\left(0,0,\dfrac{3b}{8}\right)$.

***16.** 一球形行星的半径为 R，质量为 M，其密度呈球对称分布，并向着球心线性增加．若行星表面的密度为零，那么行星中心的密度是多少?

解　设行星中心的密度为 μ_0，则由题设，在距球心 $r(0\leqslant r\leqslant R)$ 处的密度为 $\mu(r)=\mu_0-kr$.

由于 $\mu(R)=\mu_0-kR=0$，故 $k=\dfrac{\mu_0}{R}$，即

$$\mu(r)=\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_{r\leqslant R}\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r\\&=4\pi\mu_0\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\pi R^3}{3},\end{aligned}$$

因此得 $\mu_0=\dfrac{3M}{\pi R^3}$.

第 11 章

曲线积分与曲面积分

一、基 本 内 容

1. 对弧长的曲线积分
   (1) 对弧长的曲线积分的概念与性质;
   (2) 对弧长的曲线积分的计算法.
2. 对坐标的曲线积分
   (1) 对坐标的曲线积分的概念与性质;
   (2) 对坐标的曲线积分的计算法;
   (3) 两类曲线积分之间的联系.
3. 格林公式及其应用
   (1) 格林公式;
   (2) 平面上曲线积分与路径无关的条件;
   (3) 二元函数的全微分求积;
   *(4) 曲线积分的基本定理.
4. 对面积的曲面积分
   (1) 对面积的曲面积分的概念与性质;
   (2) 对面积的曲面积分的计算法.
5. 对坐标的曲面积分
   (1) 对坐标的曲面积分的概念与性质;
   (2) 对坐标的曲面积分的计算法;
   (3) 两类曲面积分之间的联系.
6. 高斯公式, *通量与散度
   (1) 高斯公式;
   (2) 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件;
   *(3) 通量与散度.
7. 斯托克斯公式, *环流量与旋度
   (1) 斯托克斯公式;
   *(2) 空间曲线积分与路径无关的条件;
   *(3) 环流量与旋度.

二、基本要求

1. 正确理解两类曲线积分与两类曲面积分的概念和性质及几何意义和物理意义.
2. 熟练掌握两类曲线积分和两类曲面积分的计算法，了解两类曲线积分和两类曲面积分之间的关系.
3. 掌握格林公式及其应用，能熟练应用平面曲线积分与路径无关的条件求解曲线积分，掌握二元函数全微分方程的求解方法.
4. 掌握高斯公式及其应用，了解斯托克斯公式和通量与散度、环流量与旋度的概念.
5. 能够用曲线积分和曲面积分求一些几何量与物理量（弧长、曲面面积、质量、重心、转动惯量、功及流量等）.

三、习题解答

习题 11-1

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 该曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x、I_y;

(2) 该曲线弧的质心坐标 $\overline{x}$、$\overline{y}$.

解 (1) 应用元素法. 假设将曲线弧 L 分割成 n 段小的曲线弧，任意取其中的一段，其长度记为 $\mathrm{d}s$，(x,y) 是曲线弧上的一点. 因为 $\mathrm{d}s$ 很小且 $\mu(x,y)$ 在 L 上连续，所以此段弧的质量近似等于 $\mu(x,y)\mathrm{d}s$，质量可近似看做集中在点 (x,y)，于是可得曲线弧 L 对于 x 轴和 y 轴的转动惯量元素:

$$\mathrm{d}I_x = y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}I_y = x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

以这些元素为被积表达式，在曲线弧 L 上积分，便得

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s, \quad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

(2) 同(1)，可应用元素法得 $\mathrm{d}s$ 对 x 轴和 y 轴的静矩元素为

$$\mathrm{d}M_x = y\mu(x,y)\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}M_y = x\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

以这些元素为被积表达式，在曲线弧 L 上积分，便得 L 对 x 轴和 y 轴的静矩

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s, \quad M_y = \int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

又已知曲线弧 L 的质量 M 用积分可表示为

$$M = \int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

性质 3　设在 L 上 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$.

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s .$$

证明　假设将曲线弧 L 任意分割成 n 段，第 i 段小曲线弧的长度为 Δs_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 段曲线弧上任意取定的一点. 按性质 3 的假设，知

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad (i=1,2,\cdots,n) .$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i .$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \to 0$，对上式两端分别取极限，由极限的保号性得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s .$$

又 $f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，$-|f(x,y)| \leqslant f(x,y)$，则由上面的结论可得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s ,$$

$$-\int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s \leqslant \int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s ,$$

即有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s .$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分.

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段;

(3) $\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A、B、C、D 依次为点 $(0,0,0)$、$(0,0,2)$、$(1,0,2)$、$(1,3,2)$；

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 (1) 代入公式转化为定积分求解.

$$\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\mathrm{d}t=a^{2n+1}\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 由题意可得直线的参数方程为 $\begin{cases}x=x\\ y=1-x\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 1)$，从而

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

(3) 设 $L_1:\begin{cases}x=x\\ y=x\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 1)$，$L_2:\begin{cases}x=x\\ y=x^2\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 1)$，由题意可知 L 由 L_1 和 L_2 组成，因此

$$\oint_L x\mathrm{d}s=\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sqrt{2}x\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).$$

(4) 设 $L_1:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases}(0\leqslant x\leqslant a)$，$L_2:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$，$L_3:\begin{cases}x=x\\ y=x\end{cases}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$，由题意知 L 由 L_1、L_2 和 L_3 共同组成，因此

$$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s,$$

又

$$\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^a=\mathrm{e}^a-1,$$

$$\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\mathrm{e}^a\mathrm{d}t=a\mathrm{e}^a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a,$$

$$\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1,$$

因此有

$$\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a-1+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^a-1=\mathrm{e}^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.$$

(5) 弧长元素 $\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_{\Gamma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t+\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t+\mathrm{e}^{2t}}\cdot\sqrt{3}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

(6) 由题意知 Γ 由 AB 、 BC 、 CD 三条直线段组成, 各直线段的参数方程如下:

$$AB:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2),\quad BC:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 1),CD:\begin{cases}x=1\\y=t\\z=2\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 3),$$

因此

$$\int_{\Gamma}x^2yz\mathrm{d}s=\int_{AB}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{BC}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{CD}x^2yz\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^2 0\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_0^3 2t\mathrm{d}t=9.$$

(7) 弧长元素

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t\overset{u=\frac{t}{2}}{=}16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u=32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

(8) 弧长元素 $\mathrm{d}s=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\mathrm{d}t=at\mathrm{d}t$, 所以

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2\right]\cdot at\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3t(1+t^2)\mathrm{d}t=a^3\int_0^{2\pi}(t+t^3)\mathrm{d}t$$

$$=a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

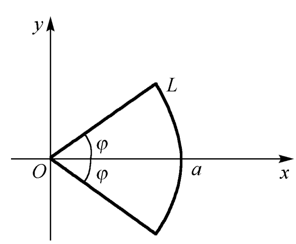


图 11-1

4. 求半径为 a 、中心角为 2φ 的均匀圆弧（线密度 $\mu=1$ ）的质心.

解 如图 11-1 所示建立直角坐标系.

则曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\end{cases}$ $(-\varphi\leqslant t\leqslant\varphi)$. 由对称性知 $\overline{y}=0$. 又

$$M_y = \int_L x\mu \mathrm{d}s = \int_{-\varphi}^{\varphi} a\cos t \cdot a\mathrm{d}t = 2a^2 \sin\varphi ,$$

$$M = \int_L \mu \mathrm{d}s = \int_L \mathrm{d}s = 2\varphi a \text{（即等于曲线弧的长度）},$$

因此

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a} = \frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

所求圆弧的质心坐标为$\left(\dfrac{a\sin\varphi}{\varphi}, 0\right)$.

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = kt$，其中$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，它的线密度$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. 求:

(1) 它关于z轴的转动惯量I_z;

(2) 它的质心.

解 (1) $I_z = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(a^2 + k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + k^2}\mathrm{d}t$$

$$= a^2\sqrt{a^2 + k^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2 + k^2}(3a^2 + 4\pi^2k^2).$$

(2) 设弹簧的质心坐标为$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

$$M = \int_L \rho(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2 + k^2t^2)\sqrt{a^2 + k^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2 + k^2}(3a^2 + 4\pi^2k^2),$$

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x, y, z)\mathrm{d}s = \frac{1}{M}\int_L x(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\cos t(a^2 + k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2 + k^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2 + k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2 + k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t,$$

因为

$$\int_0^{2\pi}(a^2 + k^2t^2)\cos t\mathrm{d}t = a^2\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t + k^2\int_0^{2\pi}t^2\cos t\mathrm{d}t = 4\pi k^2,$$

所以

$$\overline{x} = \frac{a\sqrt{a^2 + k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2 + k^2}(3a^2 + 4\pi^2k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2k^2}.$$

类似地，可得到

$$\overline{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-4\pi^2k^2)}{M}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$
$$\overline{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}t(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}\cdot(2\pi^2a^2+4\pi^4k^2)}{M}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

习题 11-2

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=0$.

证明 不妨设 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\\y=t\end{cases}$ $(t:\alpha\to\beta)$，即 L 是直线 $x=a$ 上参数 t 从 α 到 β 的一段.

由对坐标的曲线积分的求解公式，可得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot a'\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta 0\mathrm{d}t=0\ .$$

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线，证明 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x$.

证明 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}$ $(x:a\to b)$，由对坐标的曲线积分的求解公式，可得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x\ .$$

3. 计算对坐标的曲线积分.

(1) $\int_L(x^2-y^2)\mathrm{d}x$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧;

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）;

(3) $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

(4) $\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）;

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta$，$y=a\cos\theta$，$z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;

(6) $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线;

(7) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里 A，B，C 依次为点 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$;

(8) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$ $(x:0\to 2)$，则

$$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2 (x^2-x^4)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{56}{15}.$$

(2) 设 $L_1:\begin{cases} x=a+a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(t:0\to\pi)$，$L_2:\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$ $(x:0\to 2a)$，由题意知 L 由 L_1 和 L_2 共同组成，从而

$$\begin{aligned}\oint_L xy\mathrm{d}x&=\int_{L_1} xy\mathrm{d}x+\int_{L_2} xy\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi}(a+a\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{2a}0\mathrm{d}x\\
&=-a^3\int_0^{\pi}(\sin^2 t+\sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t\\
&=-a^3\left[\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}\sin t\right]\\
&=-a^3\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi}\right]\\
&=-a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\frac{\pi a^3}{2}.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[R\sin t\cdot(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t\right]\mathrm{d}t\\
&=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t\\
&=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(t:0\to 2\pi)$，则

$$\begin{aligned}&\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+a\sin t)\cdot(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)\cdot a\cos t}{a^2}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}(-1)\mathrm{d}t=-2\pi.\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z&=\int_0^{\pi}\left[k^2\theta^2\cdot k+a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot a\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi.\end{aligned}$$

(6) Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ $(t:0\to 1)$，则

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=\int_0^1\left[(1+t)+2(1+2t)+3(1+t+1+2t-1)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(6+14t)\,\mathrm{d}t=13.$$

(7) 由题意可得有向线段 AB、BC、CA 的参数方程为

$$AB:\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}\quad (t:0\to 1),\quad BC:\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}\ (t:0\to 1),\quad CA:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}\quad (t:0\to 1).$$

又 Γ 由 AB、BC、CA 组成，因此

$$\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1(-1-1)\mathrm{d}t+\int_0^1(1+1-t)\mathrm{d}t+\int_0^1 1\mathrm{d}t$$
$$=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(8) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$ $(x:-1\to 1)$，则

$$\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\left[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)\cdot 2x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^1(x^2-2x^3+2x^5-4x^4)\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1(-4x^4+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

4. 计算 $\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是:

(1) 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧;

(2) 从点 $(1,1)$ 到 $(4,2)$ 的直线段;

(3) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线;

(4) 曲线 $x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解 (1) L 的参数方程为 $\begin{cases} x=y^2 \\ y=y \end{cases}$ $(y:1\to 2)$，则

$$\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2(2y^3+y^2+y)\,\mathrm{d}y=11\frac{1}{3}.$$

(2) L 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3t\\y=1+t\end{cases}$ $(t:0\to 1)$，则

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[3(1+3t+1+t)+(1+t-1-3t)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(6+10t)\mathrm{d}t=11.$$

(3) L_1 是由 $(1,1)$ 到 $(1,2)$ 的有向线段，其参数方程为$\begin{cases}x=1\\y=1+t\end{cases}$ $(t:0\to 1)$，L_2 是由 $(1,2)$ 到 $(4,2)$ 的有向线段，其参数方程为$\begin{cases}x=1+3t\\y=2\end{cases}$ $(t:0\to 1)$，则

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1(1+t-1)\mathrm{d}t+\int_0^1 3(3+3t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14.$$

(4) L 的参数方程为$\begin{cases}x=2t^2+t+1\\y=t^2+1\end{cases}$ $(t:0\to 1)$，则

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4x+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 由题意可知，常力 $\boldsymbol{F}=\left(|F|,0\right)$，路径 L 的参数方程为$\begin{cases}x=R\cos t\\y=R\sin t\end{cases}$ $\left(t:0\to\frac{\pi}{2}\right)$，因此常力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L |F|\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\cdot(-R\sin t)\mathrm{d}t=-|F|R.$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,mg)$，质点移动路径 L 的参数方程为$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\y=y_1+(y_2-y_1)t\\z=z_1+(z_2-z_1)t\end{cases}$ $(t:0\to 1)$，则重力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L 0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y+mg\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1 mg(z_2-z_1)\mathrm{d}t=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$化成对弧长的曲线积分，其中$L$为:

(1) 在xOy面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$;

(2) 沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$;

(3) 沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

解 (1) 在曲线弧L上任意一点处切向量的方向余弦满足$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y&=\left[\int_L P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right]\mathrm{d}s\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_L\left[P(x,y)+Q(x,y)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(2) 曲线弧L的参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=x^2\end{cases}$ $(x:0\to1)$，曲线弧上任一点处切向量的方向余弦满足

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\quad \cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y&=\int_L\left[P(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}+Q(x,y)\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right]\mathrm{d}s\\&=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(3) 曲线弧L的参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=\sqrt{2x-x^2}\end{cases}$ $(x:0\to1)$，L上任意一点的切向量的方向余弦满足

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

因此

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s.$$

8. 设Γ为曲线$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$上相应于t从0变到1的曲线弧. 把对坐标的曲线积分$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$化成对弧长的曲线积分.

解 曲线Γ的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

$$\cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}=\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

$$\cos\alpha=\frac{z'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}=\frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}},$$

因此

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L\frac{P+2xQ+3x^2R}{\sqrt{1+4x^2+9x^4}}\mathrm{d}s.$$

习题 11-3

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性.

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线;

(2) $\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(2,0)$ 、 $(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界.

解 (1) 设 $L_1:\begin{cases}x=x\\y=x^2\end{cases}$ $(x:0\to1)$, $L_2:\begin{cases}x=y^2\\y=y\end{cases}$ $(y:1\to0)$, L 由 L_1 和 L_2 组成, 因此

$$\begin{aligned}&\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(2x^3+x^2+2x^5)\mathrm{d}x+\int_1^0(4y^4-2y^5+2y^2)\mathrm{d}y\\&=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

又 $P=2xy-x^2$, $Q=x+y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$, $D:0\leqslant x\leqslant1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$, 从而

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

即 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 $O(0,0)$ 、 $A(2,0)$ 、 $B(2,2)$ 、 $C(0,2)$, 由题意可知 L 由有向线段 OA 、 AB 、 BC 和 CO 共同组成, 它们的参数方程分别如下:

$$OA:\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}(x:0\to2),\qquad AB:\begin{cases}x=2\\y=y\end{cases}(y:0\to2),$$

$$BC:\begin{cases}x=x\\y=2\end{cases}(x:2\to0),\qquad CO:\begin{cases}x=0\\y=y\end{cases}(y:2\to0).$$

从而

$$\int_{OA}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3},$$

$$\int_{AB}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2(y^2-4y)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}-8,$$

$$\int_{BC}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0(x^2-8x)\mathrm{d}x=16-\frac{8}{3},$$

$$\int_{CO}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0 y^2\mathrm{d}x=-\frac{8}{3},$$

因此可得

$$\begin{aligned}&\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y\\&=\int_{OA}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y+\int_{AB}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{BC}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y+\int_{CO}\left(x^2-xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-8+16-\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=8.\end{aligned}$$

又 $P=x^2-xy^3$， $Q=y^2-2xy$， $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y$, $D:0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2$，从而

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^2(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(-4y+6y^2)\mathrm{d}y=8.\end{aligned}$$

即 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 利用曲线积分，求下面曲线所围成的图形的面积.

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t$， $y=a\sin^3 t$;

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$;

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 (1) 星形线取正向的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(t:0\to 2\pi)$，因此

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(-a\sin^3 t)\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)+a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cdot\cos t\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}\mathrm{d}t\\&=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{16}\left.\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\right|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

(2) 椭圆取正向的参数方程$\begin{cases}x=4\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$ $(t:0\to 2\pi)$，因此

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(-3\sin t)\cdot(-4\sin t)+4\cos t\cdot 3\cos t\right]\mathrm{d}t\\&=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=12\pi .\end{aligned}$$

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$ 取正向的参数方程$\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(t:0\to 2\pi)$，因此

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-a\sin t(-a\sin t)+(a+a\cos t)a\cos t\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2 .\end{aligned}$$

3. 计算曲线积分$\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

解 在圆周 L 围成的闭区域内的点 $(0,0)$ 处，$P=\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$，$Q=\dfrac{-x}{2(x^2+y^2)}$ 均无定义，因此本题不能直接利用格林公式求解. 如图 11-2 所示，构造辅助线 l：$\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ $(t:0\to 2\pi)$，在 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上应用格林公式，由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以

$$\oint_{L+l^-}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

因此

$$\begin{aligned}\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}&=\oint_l\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{-r^2\sin^2 t-r^2\cos^2 t}{2r^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-\pi .\end{aligned}$$

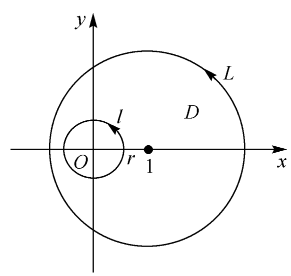


图 11-2

4. 确定闭曲线 C，使得曲线积分$\oint_C\left(x+\dfrac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\dfrac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$ 达到最大值.

解 令 $P=x+\dfrac{y^3}{3}$，$Q=y+x-\dfrac{2}{3}x^3$，在坐标平面上任取光滑闭曲线 C，设其围成的闭区域为 D，则由格林公式得

$$\oint_C\left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D(1-2x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由二重积分几何意义知，上述二重积分值恰好等于：以 $f(x,y)=1-2x^2-y^2$ 为曲顶，以闭区域 D 为底的曲顶柱体体积值，因此当闭曲线为椭圆曲线 $2x^2+y^2=1$ 时，曲顶柱体达到最大，从而积分值达到最大.

5. 设 n 边形的 n 个顶点按逆时针方向依次为 $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ $,\cdots,M_n(x_n,y_n)$. 试利用曲线积分证明此 n 边形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)\right].$$

解 利用格林公式计算 n 边形的面积, 设 n 边形的边界曲线为 L, 方向取正方向, 则有

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_{M_1M_2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{M_2M_3}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\cdots+\int_{M_nM_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$$

直线段 M_1M_2 的参数方程为

$$l:\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$

从而

$$\int_{M_1M_2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^1(x_1y_2-y_1x_2)\mathrm{d}t=x_1y_2-y_1x_2\ .$$

同理可得

$$\int_{M_2M_3}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^1(x_2y_3-y_2x_3)\mathrm{d}t=x_2y_3-y_2x_3;$$
$$\vdots$$
$$\int_{M_nM_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_0^1(x_ny_1-y_nx_1)\mathrm{d}t=x_ny_1-y_nx_1.$$

于是 n 边形的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_{M_1M_2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\int_{M_2M_3}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+\cdots+\int_{M_nM_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\cdots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})+(x_ny_1-x_1y_n)\right].$$

6. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关, 并计算积分值.

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{1,0}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$．

解 (1) 函数 $P=x+y$，$Q=x-y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关．设 $A(1,1)$，$B(2,1)$，$C(2,3)$，取有向折线 ABC，则

$$\begin{aligned}\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y&=\int_{ABC}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y+\int_{BC}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(2-y)\mathrm{d}y=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(2) 函数 $P=6xy^2-y^3$，$Q=6x^2y-3xy^2$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关．设 $A(1,2)$，$B(3,2)$，$C(3,4)$，取有向折线 ABC，则

$$\begin{aligned}&\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y\\&=\int_{ABC}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y\\&=\int_{AB}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y+\int_{BC}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y\\&=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y\\&=80+156=236.\end{aligned}$$

(3) 函数 $P=2xy-y^4+3$，$Q=x^2-4xy^3$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故此曲线积分与路径无关．设 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(2,1)$，取有向折线 ABC，则

$$\begin{aligned}&\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y\\&=\int_{ABC}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y\\&=\int_{AB}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y+\int_{BC}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2 3\mathrm{d}x+\int_0^1(4-8y^3)\mathrm{d}y=3+2=5.\end{aligned}$$

7. 利用格林公式, 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;

(2) $\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$;

(3) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧;

(4) $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$, 其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 是由 L 所围成的三角形闭区域, $P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$, 则由格林公式

$$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12.$$

(2) 设 D 是由 L 所围成的闭区域, $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x$, $Q=x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=$ $2x\sin x+x^2\cos x-2y\mathrm{e}^x=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 则由格林公式

$$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(3) 设 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 、 $B\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$, D 是由 L^- 和有向折线 OAB 所围成的闭区域, $P=2xy^3-y^2\cos x$, $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$, 则 P 、 Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则由格林公式

$$\oint_{L^-+OAB}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以

$$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OAB}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{AB}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left(y-y^2+\frac{\pi^2}{4}y^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

(4) 设 $A(1,0)$ 、 $B(1,1)$，D 是由 L^- 和有向折线 OAB 所围成的闭区域，$P=x^2-y$，$Q=-(x+\sin^2 y)$，则 P 、 Q 在 D 内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则由格林公式

$$\oint_{L^-+OAB}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以 $$\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OAB}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{OA}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y+\int_{AB}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1-(1+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1-\left(y+\frac{y}{2}-\frac{\sin 2y}{4}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{7}{6}+\frac{\sin 2}{4}.$$

8. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$.

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$;

(2) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

(3) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$;

(4) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$;

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 函数 $P=x+2y$，$Q=2x+y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x x\mathrm{d}x+\int_0^y(2x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2.$$

(2) 函数 $P=2xy$，$Q=x^2$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{d}y=x^2y.$$

(3) 函数 $P=4\sin x\sin(3y)\cos x$，$Q=-3\cos(3y)\cos(2x)$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos(3y)\sin(2x)=\frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}4\sin x\sin(3y)\cos x\mathrm{d}x-3\cos(3y)\cos(2x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y -3\cos(3y)\cos(2x)\mathrm{d}y$$
$$=-\sin(3y)\cos(2x).$$

(4) 函数 $P=3x^2y+8xy^2$，$Q=x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$$
$$=x^3y+4x^2y^2+12(y\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^y).$$

(5) 函数 $P=2x\cos y+y^2\cos x$，$Q=2y\sin x-x^2\sin y$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分．取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x 2x\,\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$$
$$=y^2\sin x+x^2\cos y.$$

9. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X = x + y^2$，$Y = 2xy - 8$，这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

解 变力在此场内移动时所作的功为

$$W = \int_L X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = \int_L (x + y^2)\mathrm{d}x + (2xy - 8)\mathrm{d}y .$$

函数 $P = x + y^2$，$Q = 2xy - 8$ 在整个 xOy 平面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此此曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

***10.** 判别下列方程中哪些是全微分方程. 对于全微分方程, 求出它的通解.

(1) $(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2 y + 4y^2)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $(a^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}x - (x + y)^2 \mathrm{d}y = 0$（$a$ 为常数）;

(3) $\mathrm{e}^y \mathrm{d}x + (x\mathrm{e}^y - 2y)\mathrm{d}y = 0$;

(4) $(x\cos y + \cos x)y' - y\sin x + \sin y = 0$;

(5) $(x^2 - y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$;

(6) $y(x - 2y)\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = 0$;

(7) $(1 + \mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho + 2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta = 0$;

(8) $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = 0$.

解 判断 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程的充要条件是: 在某一单连通区域内, P 、Q 具有一阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. 并且若 $u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}u(x, y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则 $u(x, y) = C$ 恰好是 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$ 的通解. 因此, 通解的求解方法主要有两种: 曲线积分法和凑微分法.

(1) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2 y + 4y^2)\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (6x^2 y + 4y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x 3x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (6x^2 y + 4y^2)\mathrm{d}y \\ &= x^3 + 3x^2 y^2 + \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

因此所求通解为 $x^3 + 3x^2 y^2 + \dfrac{4}{3}y^3 = C$.

(2) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x - 2y = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $(a^2 - 2xy - y^2)\mathrm{d}x - (x + y)^2\mathrm{d}y = 0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (a^2 - 2xy - y^2)\,\mathrm{d}x - (x + y)^2\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x a^2\mathrm{d}x + \int_0^y -(x + y)^2\mathrm{d}y \\ &= a^2 x - x^2 y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3, \end{aligned}$$

因此所求通解为 $a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C$.

(3) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端}&=e^y dx+(xe^y-2y)dy\\&=e^y dx+xe^y dy-2ydy\\&=d(xe^y)+d(-y^2)\\&=d(xe^y-y^2)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $xe^y-y^2=C$.

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$ 等价于

$$(x\cos y+\cos x)dy+(-y\sin x+\sin y)dx=0 .$$

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}==\cos y-\sin x=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端}&=(x\cos y+\cos x)dy+(-y\sin x+\sin y)dx\\&=d(x\sin y+y\cos x)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $x\sin y+y\cos x=C$.

(5) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $(x^2-y)dx-xdy=0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端}&=(x^2-y)dx-xdy\\&=x^2dx-ydx-xdy\\&=d\left(\frac{1}{3}x^3\right)+d(-xy)\\&=d\left(\frac{1}{3}x^3-xy\right)\end{aligned}$$

因此所求通解为 $\frac{1}{3}x^3-xy=C$.

(6) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\neq x-4y=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $y(x-2y)dx-x^2dy=0$ 不是全微分方程.

(7) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial \rho}=2e^{2\theta}=\frac{\partial P}{\partial \theta}$，所以 $(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$ 为全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程左端}&=(1+e^{2\theta})d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta\\&=d\rho+e^{2\theta}d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta\\&=d(\rho)+d(\rho e^{2\theta})\\&=d(\rho+\rho e^{2\theta})\end{aligned}$$

因此所求通解为 $\rho+\rho e^{2\theta}=C$.

(8) 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=y\neq 2y=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $(x^2+y^2)dx+xydy=0$ 不是全微分方程.

11. 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2\ (x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解 要使 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$ 为某个二元函数的梯度，需满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

因为 $P=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+x^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=P=2y(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y,$$

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 可得

$$4x(x^4+y^2)^\lambda(1+\lambda)=0.$$

因为 $x>0$，$(x^4+y^2)^\lambda>0$，所以要使上式成立，必有 $\lambda=-1$．在 xOy 的右半平面上，取点 $(x_0,y_0)=(1,0)$，则

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}2xy(x^4+y^2)^{-1}\mathrm{d}x-x^2(x^4+y^2)^{-1}\mathrm{d}y\\&=\int_1^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y -x^2(x^4+y^2)^{-1}\mathrm{d}y\\&=-\int_0^y\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}\frac{y}{x^2}\\&=-\arctan\frac{y}{x^2}.\end{aligned}$$

习题 11-4

1. 设有一分布着质量的曲面 Σ，在点 (x,y,z) 处它的面密度为 $\mu(x,y,z)$，用对面积的曲面积分表示该曲面对于 x 轴的转动惯量.

解 采用元素法求解. 假设将曲面分割为 n（n 是一个很大的数）片，任取其中一片曲面 $\mathrm{d}S$（$\mathrm{d}S$ 同时表示此曲面的面积），(x,y,z) 是曲面上一点，则此片曲面的质量可表示为 $\mu(x,y,z)\mathrm{d}S$，此曲面对于 x 轴的转动惯量元素为

$$\mathrm{d}I_x=(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

以 $\mathrm{d}I_x$ 为积分元素，在曲面 Σ 上进行积分，可得曲面对于 x 轴的转动惯量

$$I_x=\iint_\Sigma(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成.

解 将曲面 Σ_1 和 Σ_2 的边界线作为其中一条分割线，将曲面 Σ 分割为 n 份 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，假设 Σ_1 恰好被分为 n_1 份，Σ_2 被分为 n_2 份，则 $n=n_1+n_2$．取 λ 为所有 n 份曲面直径的最大值，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

$$\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

$$\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

两侧分别取极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i\ ,$$

从而有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S\ .$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系?

解 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，Σ 可表示为 $z=0$，且 Σ 在 xOy 面上的投影为 Σ 自身，面积元素 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+{z_x'}^2+{z_y'}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，从而由曲面积分的求解公式得

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下:

(1) $f(x,y,z)=1$;

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$;

(3) $f(x,y,z)=3z$.

解 由题意知曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 2\right\}$，面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

(1)
$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma}\mathrm{d}S\\ &= \iint_{D}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（可转化为极坐标求解）}\\ &= \iint_{D}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{（可转化为极坐标求解）}$$

$$=\iint\limits_{D}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho\left(\text{令}\rho=\frac{1}{2}\tan t\right)$$

$$=2\pi\cdot\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\frac{1}{8}\tan^3 t\cdot\sec t\cdot\frac{1}{2}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\tan^3 t\sec^3 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\tan^2 t\sec^2 t\mathrm{d}\sec t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}(\sec^2 t-1)\sec^2 t\mathrm{d}\sec t$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}(\sec^4 t-\sec^2 t)\mathrm{d}\sec t$$

$$=\frac{149\pi}{30}.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}3z\mathrm{d}S$

$$=3\iint\limits_{D}(2-x^2-y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{（可转化为极坐标求解）}$$

$$=3\iint\limits_{D}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\left(\text{令}\rho=\frac{1}{2}\tan t\right)$$

$$=6\pi\cdot\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\left(2-\frac{1}{4}\tan^2 t\right)\sqrt{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{2}\tan t\cdot\frac{1}{2}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}(8-\tan^2 t)\tan t\sec^3 t\mathrm{d}t$$

$$=3\pi\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t\mathrm{d}\sec t-\frac{3\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}(\sec^2 t-1)\sec^2 t\mathrm{d}\sec t$$

$$=26\pi-\frac{149}{10}\pi=\frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是:

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

解 (1) 设 $\Sigma_1: z=1$，$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}$，由题意可知积分曲面 Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 共同组成, 两曲面的交线为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases}$，因此可得 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+(z_x{}')^2+(z_y{}')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+(z_x{}')^2+(z_y{}')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（可转化为极坐标求解）}$$

$$=(1+\sqrt{2})\iint_{D_{xy}}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=(1+\sqrt{2})\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) 锥面 $\Sigma: z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 3$.

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x{}'^2+z_y{}'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{3(x^2+y^2)}}\right)^2+\left(\frac{3y}{\sqrt{3(x^2+y^2)}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（可转化为极坐标求解）}$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\cdot 2\pi\cdot\frac{9}{4}=9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分.

(1) $\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

(2) $\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分;

(3) $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h\ (0<h<a)$ 的部分;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 曲面 $\Sigma: z=4-2x-\dfrac{4}{3}y$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 是由 x 轴、y 轴和直线 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ 围成的三角形区域.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D_{xy}}\left(4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y\right)\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot D_{xy}\text{ 的面积}\\&=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\right)=4\sqrt{61}.\end{aligned}$$

(2) 曲面 $\Sigma: z=6-2x-2y$，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=3$ 围成的三角形区域.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\iint\limits_{D_{xy}}(2xy-2x^2+6-3x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(2xy+6-2x^2-3x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\frac{27}{4}.\end{aligned}$$

(3) 曲面 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$.
由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面对称，所以

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=0,$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\pi(a^2-h^2).$$

(4) 曲面$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，Σ在xOy面上的投影区域D_{xy}：$x^2+y^2 \leqslant 2ax$，由于积分曲面Σ关于xOz面对称，而xy和yz是关于y的奇函数，因此有

$$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}S = 0.$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} zx\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} \rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

7. 求抛物面壳$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$的质量，此壳的面密度为$u=z$.

解 曲面$\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$在$xOy$面上的投影区域$D_{xy}$：$x^2+y^2 \leqslant 2$. 此壳的质量

$$m = \iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho.$$

令 $\rho^2=t$ 即 $\rho=\sqrt{t}$，$\mathrm{d}\rho=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho&=\int_0^2 t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 t\mathrm{d}\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}t\right]\Bigg|_0^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{15}(6\sqrt{3}+1),\end{aligned}$$

因此 $m=\dfrac{2}{15}(6\sqrt{3}+1)\pi$.

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解 曲面 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2$，半球壳对于 z 轴的转动惯量

$$\begin{aligned}I_z&=\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S\\&=\mu_0\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\mu_0\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\mu_0\int_0^a\rho^3\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho,\end{aligned}$$

令 $\rho=a\sin t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^a\rho^3\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^3 t\cdot\frac{a}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t\\&=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t\\&=a^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}a^4,\end{aligned}$$

所以 $I_z = 2\pi\mu_0\int_0^a \rho^3 \dfrac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \dfrac{4}{3}\pi a^4\mu_0$.

习题 11-5

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

证明 将曲面 Σ 任意分割为 n 份 ΔS_i （ΔS_i同时表示每片曲面的面积, $i=1,2,\cdots,n$ ）, ΔS_i 在 yOz 平面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$，在每片曲面上任意取点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，所有小曲面直径的最大值用 λ 表示, 由对坐标的曲面积分的定义知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}\left[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\right](\Delta S_i)_{yz}\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} \pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\\
&=\iint\limits_{\Sigma}P_1(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\pm\iint\limits_{\Sigma}P_2(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z .
\end{aligned}$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系?

解 曲面 Σ 可表示为 $z=0$，取哪一侧不确定. 假设曲面在 xOy 平面上的投影为 D_{xy}，则由对坐标的曲面积分的求解公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

当曲面取上侧时, 公式取正号, 曲面取下侧时, 公式取负取号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分.

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\left[f(x,y,z)+x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[2f(x,y,z)+y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[f(x,y,z)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧;

(4) $\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) 曲面$\Sigma: z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，取下侧. Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant R^2$，则

$$\iint_{\Sigma} x^2y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}} \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho \quad （令\rho = R\sin t）$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 因为曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影为 0，所以 $\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 曲面 Σ 在 yOz 平面及 zOx 平面上的投影为

$$D_{yz}=\{(y,z)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3\},$$

$$D_{zx}=\{(x,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3\},$$

又曲面取的是前侧，所以

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y+\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y \quad （可利用几何意义求解）$$

$$=6\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi.$$

(3) 可利用两类曲面积分之间的关系求解. 曲面$\Sigma: z=1-x+y$，取上侧. 曲面上任意一点处单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}(-z_x', -z_y', 1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1).$$

由两类曲面积分之间的关系得

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]\cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]\cos\beta$$

$$+[f(x,y,z)+z]\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\Sigma\text{ 的面积}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(4) 由题可知，在三个坐标平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 上的积分值均为零，因此只需计算曲面 $\Sigma':x+y+z=1$ 上的积分. 由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性可知

$$\iint\limits_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma'}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma'}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{24},$$

所以

$$\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma'}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma'}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=3\iint\limits_{\Sigma'}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由曲面取上侧可知，曲面上任意一点的单位法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}\cdot(3,2,2\sqrt{3})\\ &= \left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma}\left[\frac{3}{5}P(x,y,z)+\frac{2}{5}Q(x,y,z)+\frac{2\sqrt{3}}{5}R(x,y,z)\right]\mathrm{d}S .\end{aligned}$$

(2) 由曲面取上侧可知，曲面上任意一点的单位法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}\cdot(-z_x', -z_y', 1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot(2x,2y,1),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma}\left[\frac{2xP(x,y,z)+2yQ(x,y,z)+R(x,y,z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right]\mathrm{d}S .\end{aligned}$$

习题 11-6

1. 利用高斯公式计算曲面积分.

(1) $\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=a$，$y=a$，$z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

*(2) $\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

*(3) $\oiint_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\leqslant a^2$ 的表面的外侧;

(4) $\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧;

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=1$，$y=1$，$z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{\Omega} 2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x+y+z)\mathrm{d}z \\ &= 2\int_0^a (a^2x+a^3)\mathrm{d}x = 3a^4 .\end{aligned}$$

*(2) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{（可利用球面坐标求解）} \\ &= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= \frac{12}{5}a^5\pi .\end{aligned}$$

*(3) 由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{5}a^5\pi .\end{aligned}$$

(4) 由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 81\pi .$$

(5) 有高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{\Omega}(4z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

由被积函数和积分区域关于积分变量的对称性，可得

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z ,$$

从而

$$\text{原式}=3\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{3}{2}.$$

***2.** 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量.

(1) $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面，流向外侧;

(2) $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面，流向外侧;

(3) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心、半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解 (1) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.\end{aligned}$$

(2) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint\limits_{\Sigma}(2x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-xz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iiint\limits_{\Omega}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}(x^2-2xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\cdot a^3+\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x^2-2xz)\mathrm{d}z\\&=2a^3-\frac{1}{6}a^5=a^3\left(2-\frac{1}{6}a^2\right).\end{aligned}$$

(3) 由通量的定义知

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(xz+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3=108\pi.\end{aligned}$$

***3.** 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度.

(1) $\boldsymbol{A}=(x^2+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^2+xy)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i}+\cos(xy)\boldsymbol{j}+\cos(xz^2)\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$.

解 (1) 设 $P=x^2+yz$, $Q=y^2+xz$, $R=z^2+xy$ ，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z).$$

(2) 设 $P=\mathrm{e}^{xy}$, $Q=\cos(xy)$, $R=\cos(xz^2)$ ，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y\mathrm{e}^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2).$$

(3) 设 $P=y^2$ 、 $Q=xy$ 、 $R=xz$ ，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x.$$

4. 设 $u(x,y,z)$ 、 $v(x,y,z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数， $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 、 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x,y,z)$ 、 $v(x,y,z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式称为格林第二公式.

证明 由格林第一公式知

$$\iiint\limits_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

将公式中的 u 、 v 位置互换，得

$$\iiint\limits_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

上面两式相减可得

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

***5.** 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证明 以液面作为 xOy 平面建立空间直角坐标系，z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ . 在物体表面 Σ 上取面积元素 $\mathrm{d}S$ ， $M(x,y,z)$ 为 $\mathrm{d}S$ 上的一点 $(z\leqslant 0)$ ， Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ ，则 $\mathrm{d}S$ 所受液体的压力在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分量分别为

$$\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S,\quad \rho z\cos\beta\mathrm{d}S,\quad \rho z\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

Σ 所受液体的总压力在各坐标轴上的分量，等于上列各个分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式

计算可得

$$F_x=\oiint\limits_{\Sigma}\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial x}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,$$

$$F_y=\oiint\limits_{\Sigma}\rho z\cos\beta\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,$$

$$F_z=\oiint\limits_{\Sigma}\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\rho V\quad（V\text{为}\Omega\text{的体积}），$$

因此合力 $\boldsymbol{F}=\rho V\boldsymbol{k}$，此力的方向铅直向上，大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11-7

1. 试对曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2$，$x^2+y^2\leqslant 1$，$P=y^2$，$Q=x$，$R=z^2$ 验证斯托克斯公式.

证明 不妨设曲面 Σ 取上侧，那么按右手规则，Σ 的边界曲线 Γ 从 z 轴正向看过去应取逆时针方向. 设曲线 Γ 的参数方程为 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=1$ $(t:0\to 2\pi)$，则

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\oint_\Gamma y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\left[\cos^2 t-\sin^3 t\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\\&=\pi+0=\pi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}&=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\y^2&x&x^2\end{vmatrix}\\&=\iint\limits_{\Sigma}(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}(1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}(1-2\rho\sin\theta)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho-\rho^2\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\pi,\end{aligned}$$

即

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

*2. 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分.

(1) $\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从 x 轴的正向看去，该圆周取逆时针方向；

(2) $\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$，$(a>0,b>0)$，若从 x 轴的正向看去，该椭圆取逆时针方向；

(3) $\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z$，$z=2$，若从 z 轴的正向看去，该圆周取逆时针方向；

(4) $\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9$，$z=0$，若从 z 轴的正向看去，该圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取 Σ 为 $x+y+z=0$ 被 Γ 所围成的部分，并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，则由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 取 Σ 为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$ 被 Γ 所围成的部分，并取上侧. 曲面 Σ 上任意一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，则由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_\Sigma \mathrm{d}S,$$

积分 $\iint_\Sigma \mathrm{d}S$ 恰好为曲面 Σ 的面积，因此可以利用曲面积分进行求解，在这里我们选用一种更方面的方法求解. 记曲面 Σ 的面积为 S_Σ，Σ 在 xOy 面上的投影区域的面积记为 S_D，两者之间满足关系式 $S_\Sigma=\dfrac{S_D}{\cos\gamma}$，而 $S_D=\pi a^2$，所以

$$S_\Sigma=\frac{S_D}{\cos\gamma}=\frac{\pi a^2}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

所以，原积分$=\dfrac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\dfrac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+b^2}=-2\pi a(a+b)$.

(3) 取Σ为$z=2$被Γ所围成的部分，并取上侧. 曲面Σ上任意一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\lambda)=(0,0,1)$，且$\Sigma$在$xOy$面上的投影区域为$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 4$，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}0&0&1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y&-xz&yz^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}(z+3)\mathrm{d}S$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-20\pi.$$

(4) 取Σ为$z=0$被Γ所围成的部分，并取上侧. 曲面Σ上任意一点处的单位法向量为$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(0,0,1)$，且$\Sigma$在$xOy$面上的的投影区域为$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 9$，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma}2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}0&0&1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y&3x&-z^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\pi\cdot 3^2=9\pi.$$

***3.** 求下列向量场$\boldsymbol{A}$的旋度.

(1) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$;

(3) $\boldsymbol{A}=x^2\sin y\boldsymbol{i}+y^2\sin(xz)\boldsymbol{j}+xy\sin(\cos z)\boldsymbol{k}$.

解 (1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z-3y&3x-z&y-2x\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

(2) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ z+\sin y&-(z-x\cos y)&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

(3) $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2\sin y&y^2\sin(xz)&xy\sin(\cos z)\end{vmatrix}$

$$=\left[x\sin(\cos z)-xy^2\cos(xz)\right]\boldsymbol{i}-y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}+\left[y^2z\cos(xz)-x^2\cos y\right]\boldsymbol{k}.$$

***4.** 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分值，其中 $\boldsymbol{A}$、Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下:

(1) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量;

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $\{(x,y,z)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant z\leqslant 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) 曲面 Σ 的正向边界曲线 Γ 是 xOy 平面上的圆周：$x^2+y^2=1$，且从 z 轴正向看，Γ 取逆时针方向. Γ 的参数方程为：$x=\cos t, y=\sin t, z=0\ (t:0\to 2\pi)$，则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\sin t(\cos^2 t-\sin^2 t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t=0.\end{aligned}$$

(2) 曲面 Σ 的正向边界曲线 Γ 是由 $x=0, y=0, x=2, y=2$ 所围成的正方形的边界曲线，且从 z 轴正向看，Γ 取逆时针方向. 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\quad（\text{在}\Gamma\text{上}z\text{恒为}0）\\&=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x=\int_{x=0}y\mathrm{d}x+\int_{y=0}y\mathrm{d}x+\int_{x=2}y\mathrm{d}x+\int_{y=2}y\mathrm{d}x\\&=\int_{y=2}y\mathrm{d}x=\int_2^0 2\mathrm{d}x=-4.\end{aligned}$$

***5.** 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ（从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向）的环流量.

(1) $\boldsymbol{A}=-y\,\boldsymbol{i}+x\,\boldsymbol{j}+c\,\boldsymbol{k}$（$c$ 为常量），Γ 为圆周 $x^2+y^2=1$，$z=0$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$，其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$，$z=0$.

解 由两类曲线积分之间的关系，环流量又可表示为

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

(1) 曲线 Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0\ (t:0\to 2\pi)$，因此环流量

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s&=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\left[(-\sin t)\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t\right]\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

(2) 曲线 Γ 的参数方程为 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=0\ (t:0\to 2\pi)$，因此环流量

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{\Gamma} (x-z)\mathrm{d}x + (x^3+yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z \quad （在\Gamma上z恒为0）$$

$$= \oint_{\Gamma} x\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[2\cos t\cdot(-2\sin t) + 8\cos^3 t\cdot 2\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$= -4\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\mathrm{d}t + 16\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 0 + 16\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t \quad （由周期性和对称性）$$

$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t = 64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 12\pi .$$

***6.** 证明 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{b}$.

证明 设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，其中 a_x、a_y、a_z;b_x、b_y、b_z 均为关于 x、y、z 的函数.

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\left[(a_x+b_x)\boldsymbol{i} + (a_y+b_y)\boldsymbol{j} + (a_z+b_z)\boldsymbol{k}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$= \mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{b} .$$

***7.** 设 $u = u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ u)$.

解 $\mathrm{grad}\ u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$,

$$\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\ u) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

由于$u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，所以有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，从而

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,u)=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=0 .$$

总习题十一

1. 填空.

(1) 第二类曲线积分$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$化成第一类曲线积分是________________，其中α、β、γ为有向曲线弧Γ在点(x,y,z)处的________的方向角.

(2) 第二类曲面积分$\iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成第一类曲面积分是____________，其中α、β、γ为有向曲面Σ在点(x,y,z)处的________的方向角.

解　(1) 由两类曲线积分之间的关系知，第一个空格填$\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$；第二空格填“切向量”.

(2) 由两类曲面积分之间的关系知，第一个空格填$\iint\limits_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；第二空格填“法向量”.

2. 下题中给出了四个结论，从中选择一个正确的结论.

设曲面Σ是上半球面$x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\geqslant 0)$，曲面$\Sigma_1$是曲面$\Sigma$在第一卦限中的部分，则有________.

A. $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　B. $\iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$

C. $\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　D. $\iint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$

解　答案 C

分析：对于答案 A，因为被积函数x关于x为奇函数，同时积分曲面Σ关于yOz平面对称，因此有$\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S=0$．而在$\Sigma_1$上$x>0$，所以$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S>0$，因此$\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S\neq 4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$．

同理可得答案 B、D 也是错误的．对于答案 C，由于被积函数z关于x和y都是偶函数，且积分曲面Σ关于yOz和zOx平面都是对称的，因此有$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S$．而在曲面$\Sigma_1$上，$x$、$y$、$z$都是对称的，因此$\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$，所以有$\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$成立.

3. 计算下列曲线积分.

(1) $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=ax$；

(2) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$，其中Γ为曲线$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t\ (0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(3) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, 其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 上对应 t 从 0 到 2π 的一段弧;

(4) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上由 $t_1=0$ 到 $t_2=1$ 的一段弧;

(5) $\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\mathrm{d}y$, 其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$, $y \geqslant 0$ 沿逆时针方向;

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕, 从 z 轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 (1) 由题目可得曲线 L 的极坐标方程 $\rho = a\cos\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, 因此 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\cos\theta\sin\theta \end{cases} \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, 因此

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot \sqrt{(x_\theta')^2+(y_\theta')^2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2a^2.$$

(2)
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma z\mathrm{d}s &= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \sqrt{2+t^2}d(2+t^2) \\
&= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right].
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\left[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t)\cdot a\sin t\right]\mathrm{d}t \\
&= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t = -2\pi a^2.
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z &= \int_0^1\left[(t^4-t^6)\cdot 1 + 2t^5\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\left[3t^6 - 2t^4\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.
\end{aligned}$$

(5) 设点 $A(2a,0)$, 添加有向直线段 $OA: y=0\ (x: 0 \to 2a)$, 则 OA 和 L 共同构成封闭的有向曲线, 其所围成的半圆形闭区域用 D 表示, 则由格林公式

$$\begin{aligned}
\oint_{L+OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (\mathrm{e}^x\cos y - \mathrm{e}^x\cos y + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pi a^2,
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \pi a^2 - \int_{OA} (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\mathrm{d}y \\ &= \pi a^2 - \int_0^{2a} 0\mathrm{d}x = \pi a^2 .\end{aligned}$$

(6) 由题意可知曲线 Γ 的一般式方程 $\begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$，得 $x^2 + 2y^2 = 1$，则可设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t \end{cases}$ $(t: 0 \to 2\pi)$，从而

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^2 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi .\end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分.

(1) $\iint\limits_\Sigma \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2 + y^2 + z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$；

(2) $\iint\limits_\Sigma (y^2 - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z^2 - x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x^2 - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}\ (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的外侧;

(3) $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(4) $\iint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 的外侧.

解 (1) 将曲面 Σ 分割为两片 $\Sigma_1 : x = \sqrt{R^2 - y^2}$，$\Sigma_2 : x = -\sqrt{R^2 - y^2}$，两片曲面在 yOz 平面上的投影都是 $D_{yz} = \{(y,z) | -R \leqslant y \leqslant R, 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}S}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 - y^2 + y^2 + z^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}\right)^2 + 0^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 + z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= R\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}\mathrm{d}y\int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$= R\left(\arcsin\frac{y}{R}\right)\Bigg|_{-R}^{R} \cdot \left(\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right)\Bigg|_{0}^{H}$$

$$= \pi\arctan\frac{H}{R},$$

又被积函数关于 x 为偶函数，曲面 Σ_1、Σ_2 关于 yOz 平面对称，所以有

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2},$$

从而

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} + \iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} = 2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) 添加曲面 $\Sigma_1:\left\{(x,y,z)\,\middle|\,z=h,\ x^2+y^2\leqslant h^2\right\}$，取上侧．$\Sigma_1$ 在 xOy 面上的投影区域记为 D_{xy}．曲面 Σ 和 Σ_1 组成一个封闭的有向曲面且取外侧，所围成的空间闭区域记为 Ω，由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

从而

$$\iint_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0-\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由对称性知

$$\iint_{D_{xy}}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\quad \iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而

$$\iint_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{\pi h^4}{4}.$$

(3) 添加曲面 $\Sigma_1: z=0,\ x^2+y^2\leqslant R^2$，取下侧．$\Sigma$ 和 Σ_1 共同组成一个封闭的有向曲面，所围成的空间有界闭区域记为 Ω．由高斯公式

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 = 2\pi R^3,$$

从而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\pi R^3 - \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\pi R^3 - \iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\pi R^3 - \iint\limits_{D_{xy}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi R^3.\end{aligned}$$

(4) 将曲面 Σ 分割为两片有向曲面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$ 取上侧，$\Sigma_2: x^2+y^2+z^2=1\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\leqslant 0)$ 取下侧，曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域用极坐标表示为 $D_{xy}=\left\{(\rho,\theta)\middle| 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint\limits_{D_{xy}} \rho^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho\ \ (\text{令}\rho=\sin t) \\ &= 1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t - \sin^5 t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

5. 证明 $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

证明 设 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，则 P 和 Q 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因此 $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在 G 内是某一个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

取点 $(x_0,y_0)=(1,0)$，则

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln x^2$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\frac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场, 其中 k 为常数, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

解 在此力场中场力所作的功可表示为

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_L\frac{k}{\rho^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=-k\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\rho^3}.$$

设 $P=-\frac{kx}{\rho^3}$ 、 $Q=-\frac{ky}{\rho^3}$, 则在单连通区域 $x>0$ 内满足

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3kxy}{\rho^5}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以, 此曲线积分与路径无关, 即场力所作的功与所取的路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a,b) , 终点为 (c,d) . 记

$$I=\int_L\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时, 求 I 的值.

解 (1) 证明 设 $P=\frac{1+y^2f(xy)}{y}$ 、 $Q=\frac{x\left[y^2f(xy)-1\right]}{y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

由题意知 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在上半平面上连续, 所以曲线积分与路径无关.

(2) 设 $A(a,b)$ 、 $B(c,b)$ 、 $C(c,d)$, 取路径为有向折线 ABC , 则

$$I=\int_{ABC}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{ABC}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2f(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\frac{c}{y^2}\left[y^2f(cy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}\mathrm{d}x+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y-\int_b^d\frac{c}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}t+\left.\frac{c}{y}\right|_b^d$$

$$=\frac{c-a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t=0$，所以 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

8. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 不妨设曲面的质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由曲面关于坐标平面 yOz 和 xOz 对称知，$\overline{x}=\overline{y}=0$.
曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xOy 面上的投影 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$，则曲面的面积

$$S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{a\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=2\pi a^2,$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+{z_x}'^2+{z_y}'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3,$$

因此有

$$\overline{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{S}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所以此曲面的质心坐标为$\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

9. 设 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数，分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

(1) $\iint\limits_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}\left(\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \left(u\dfrac{\partial v}{\partial n} - v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，符号 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

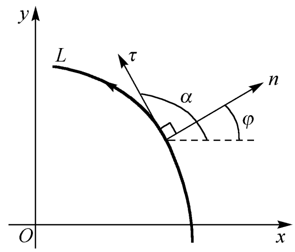


图 11-3

证明 (1) 如图 11-3 所示，$\boldsymbol{n}$ 是有向曲线 L 的外法线向量，$\boldsymbol{\tau}$ 是 L 的切向量. 设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 与 x 轴正向的夹角分别为 φ 和 α，由图可知：$\alpha = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi$，$\sin\varphi$；$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$.

$$\begin{aligned}
\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s &= \oint_L v(u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s \\
&= \oint_L v(u_x\sin\alpha - u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s(\cos\alpha\mathrm{d}s = \mathrm{d}x, \sin\alpha\mathrm{d}s = \mathrm{d}y) \\
&= \oint_L vu_x\mathrm{d}y - vu_y\mathrm{d}x \\
&= \iint\limits_D \left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \left[(u_xv_x + vu_{xx}) + (u_yv_y + vu_{yy})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D v(u_{xx} + u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D (u_xv_x + u_yv_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

即有

$$\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

(2) 在式(1)中交换 u、v 的位置得

$$\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_D (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

式(1)减去式(2)得

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

***10.** 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解 由通量的定义知，向量通过闭区域 Ω 的边界曲面流向外侧的通量可表示为

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 3\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3 \cdot 1 = 3.\end{aligned}$$

11. 求力 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功, 其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从 z 轴正向看去, 沿顺时针方向.

解 平面 $x+y+z=1$ 与三条坐标轴的交点分别记为 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,1)$, 力 $\boldsymbol{F}$ 沿闭曲线 Γ 所作的功可表示为

$$\begin{aligned}W &= \oint_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \oint_{ACBA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z \\ &= \int_{AC} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z + \int_{CB} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z + \int_{BA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z\end{aligned}$$

有向直线段 AC、CB、BA 的参数方程可分别表示如下:

$$AC: x = 1-t,\ y = 0,\ z = t\ \ (t: 0 \to 1),$$

$$CB: x = 0,\ y = t,\ z = 1-t\ \ (t: 0 \to 1),$$

$$BA: x = t,\ y = 1-t,\ z = 0\ \ (t: 0 \to 1).$$

所以

$$\int_{AC} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{CB} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{BA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

从而得 $W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

第 12 章

无 穷 级 数

一、基 本 内 容

1. 常数项级数的概念与性质

(1) 常数项级数的概念:（常数项）无穷级数（级数）、级数的一般项、无穷级数的收敛与发散;

(2) 收敛级数的基本性质:

① 级数的每一项同乘一个不为零的常数后，它的收敛性不会改变;

② 两个收敛级数可以逐项相加或相减;

③ 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性;

④ 如果级数收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变;

⑤ 级数收敛的必要条件：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则它的一般项 u_n 趋于零，即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

*(3) 柯西收敛原理.

2. 常数项级数的审敛法

(1) 正项级数及其审敛法：比较审敛法、比较审敛法的极限形式、比值审敛法（达朗贝尔判别法）、*根值审敛法（柯西判别法）、极限审敛法;

(2) 交错级数及其审敛法：莱布尼茨定理;

(3) 绝对收敛与条件收敛级数绝对收敛与级数收敛有如下重要关系：级数绝对收敛则级数必定收敛;

*(4) 绝对收敛的性质.

3. 幂级数

(1) 函数项级数的概念:（函数项）无穷级数（级数）、收敛点、发散点、收敛域、发散域、和函数、余项;

(2) 幂级数及其收敛性:

① 阿贝尔定理;

② 收敛半径及其求法.

(3) 幂级数的运算:

① 幂级数的加法、减法、乘法、除法运算;

② 幂级数的和函数的重要性质：幂级数的和函数在其收敛域上连续；幂级数的和函数在其收敛域上可积，并由逐项积分公式，逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收

敛半径; 幂级数的和函数在其收敛区间内可导, 且有逐项求导公式, 逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

4. 函数展开成幂级数
   (1) 泰勒级数、泰勒展开式及泰勒展开式成立的条件;
   (2) 麦克劳林级数、麦克劳林展开式.
5. 函数的幂级数展开式的应用
   (1) 近似计算;
   (2) 微分方程的幂级数解法;
   (3) 欧拉公式.

*6. 函数项级数的一致收敛性及一致收敛数的基本性质
   (1) 函数项级数的一致收敛性:
      ① 函数项级数的一致收敛性的定义;
      ② 函数项级数的一致收敛性的判别方法: 魏尔斯特拉斯（Weierstrass）判别法.
   (2) 一致收敛级数的基本性质.

7. 傅里叶级数
   (1) 三角级数、三角级数系的正交性;
   (2) 函数展开成傅里叶级数;
   (3) 正弦级数和余弦级数;
8. 一般周期函数的傅里叶级数
   (1) 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数;
   *(2) 傅里叶级数的复数形式.

二、基 本 要 求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念.
2. 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
3. 掌握几种常见的级数, 如几何级数与 $p-$ 级数的收敛与发散的条件.
4. 熟悉正项级数的审敛法, 掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法，会用根值审敛法.
5. 掌握交错级数的莱布尼茨定理.
6. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念, 以及绝对收敛与条件收敛的关系.
7. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念; 掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法; 了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质.
8. 会求一些幂级数在收敛区间内的和函数, 并会由此求出某些常数项级数的和; 了解函数展开成泰勒级数的充分必要条件;
9. 掌握 $\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x,\ln(1-x),(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式， 会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数; 了解幂级数在近似计算上的简单应用;
10. 了解傅里叶级数的概念和函数展开为傅里叶级数的狄利克雷定理, 会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数, 会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数和余弦级数, 会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

三、习 题 解 答

习题 12-1

1. 写出下列级数的前五项.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 (1) $\dfrac{1+1}{1+1^2}+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\dfrac{1+4}{1+4^2}+\dfrac{1+5}{1+5^2}+\cdots=1+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{17}+\dfrac{3}{13}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{15}{48}+\dfrac{105}{384}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{5^5}-\cdots$;

(4) $1+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\dfrac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;　　(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;

(3) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 (1) $s_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，级数发散.

(2) 部分和

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

所以级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

(3) $s_n=\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}$，注意到

$$\sin\frac{k\pi}{6}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\cos(2k-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2k+1)\frac{\pi}{12}\right],$$

取 $k=1,2\cdots,n$，并相加，得

$$s_n=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\left(\cos(2n-1)\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\cos\frac{\pi}{12}-\cos(2n+1)\frac{\pi}{12}\right],$$

当 $n\to\infty$ 时，$\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{12}$ 是振荡的，其极限不存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，题设级数发散.

(4) 注意到 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln(1+n)-\ln n$，所以

$$s_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(1+n)-\ln n]=\ln(1+n)-\ln 1=\ln(1+n),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，级数发散.

3. 判定下列级数的收敛性.

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$;　　(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;　　(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 (1) 此为等比（几何）级数，公比 $q=-8/9$，且 $|q|<1$，故此级数收敛于

$$\frac{-\frac{8}{9}}{1-q}=\frac{-\frac{8}{9}}{1+\frac{8}{9}}=-\frac{8}{17}.$$

(2) 级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{n}$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，知题设级数发散.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq 0$，不满足级数收敛的必要条件，所以该级数发散.

(4) 此为几何级数，公比 $q=3/2>1$，故该级数发散.

(5) 将此级数看成两个几何级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

这两个级数的公比:

$$q_1=1/2,q_2=1/3,|q_1|<1,|q_2|<1,$$

故这两个几何级数收敛，从而原级数也收敛，且其和

$$s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

***4.** 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}\right)$.

解 (1) 对于任何自然数 p，因为

$$
\begin{aligned}
\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)\frac{1}{n+p}\right| \\
&\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)-\left(\dfrac{1}{n+4}-\dfrac{1}{n+5}\right)-\cdots-\dfrac{1}{n+p} (p\text{为偶数}) \\ \dfrac{1}{n+1}-\left(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}\right) (p\text{为奇数}) \end{cases} \\
&< \frac{1}{n+1}, \left(\text{令}\frac{1}{n+1}<\varepsilon,\text{解得}n>\frac{1}{\varepsilon}-1.\right)
\end{aligned}
$$

因为 $\forall\varepsilon>0$，并设 $\varepsilon<1$，$\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]>0,$ 当 $n>N$ 时，对任何自然数 p，都有

$$
\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,
$$

由柯西审敛原理，知所给级数收敛.

(2) 注意到每三项都有一个负项，特别地，取 $p=3n$，则

$$
\begin{aligned}
\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right| &= \left|S_{n+p}-S_n\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right| \\
&> \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}\right| (n\text{项}) \\
&> \frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots\frac{1}{4n} (n\text{项}) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

于是，给定 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，对于任意 $n\in\mathbb{N}^+,\exists p=3n$，使得

$$
\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|>\varepsilon_0,
$$

由柯西审敛原理，知此级数发散.

(3) 对于任何自然数 p，因为

$$
\begin{aligned}
\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^p}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right) \\
&< \frac{1}{2^n},
\end{aligned}
$$

对于 $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<1,\exists N=\left[\dfrac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]>0$, 当 $n>N$ 时，对于任何自然数 p，都有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

所以题设级数收敛.

(4) 与第(2)题类似，每三项中有一个负项，特别地，取 $p=3n$，则

$$\begin{aligned}\left|s_{n+p}-s_n\right|&=\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|\\&=\left|\left(\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{3n+6}\right)+\left(\frac{1}{3n+7}+\frac{1}{3n+8}-\frac{1}{3n+9}\right)+\cdots+\right.\\&\quad\left.\left(\frac{1}{3n+3p+1}+\frac{1}{3n+3p+2}-\frac{1}{12n+3}\right)\right|\\&>\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+7}+\cdots+\frac{1}{3n+3p+1}(\text{共}n\text{项})\\&>\frac{n}{12n+1}\\&>\frac{n}{13n}\\&=\frac{1}{13}(n>1),\end{aligned}$$

于是，给定 $\varepsilon_0=1/13$，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 及 $n>1$，$\exists p=3n$，使得 $\left|s_{n+p}-s_n\right|>\varepsilon_0$，可见级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}\right)$ 发散，从而题设级数也发散.

习题 12-2

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性.

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)}+\cdots$;

(2) $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2^2}+\sin\dfrac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{2^n}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 (1) 级数的通项 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}$，与调和级数比较. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}\bigg/\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以题设级数也发散.

(2) 因 $u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}>\dfrac{1+n}{n+n^2}=\dfrac{1}{n}$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的发散性和比较法，知题设级数也发散.

(3) 通项$u_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$，与$p-$级数（取$p=2$）比较.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}\Big/\dfrac{1}{n^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)(n+4)}=1$，故由$p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的收敛性，知题设级数也收敛.

(4) 通项$u_n=\sin\dfrac{\pi}{2^n}$，与几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$比较，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2^n}\right)=1,$$

故由几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\pi\cdot\dfrac{1}{2^n}\right)$收敛，知题设级数也收敛.

(5) 需要讨论参数a不同的取值情况.

当$a\leqslant 1$时，通项

$$u_n=\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故级数发散. 当$a>1$，$\dfrac{1}{a}<1$时，

$$u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

由几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\left(0<\dfrac{1}{a}<1\right)$收敛，知题设级数也收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性.

(1) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{3}{2}>1$，

由比值法知，该级数发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n^2}{3^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\right]=\dfrac{1}{3}<1$，所以该级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right]=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，

所以该级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\Big/\left(n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+1}{n}\cdot\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\Big/\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right]=1\cdot\dfrac{1}{2}<1$，

所以该级数收敛.

***3.** 用根植审敛法判定下列级数的收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n\to\infty), a_n, b, a$ 均为正数.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，所以该级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，所以该级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)\right]=\mathrm{e}^{2\cdot\ln\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2<1,$$

所以该级数收敛.

(4) 需讨论参数 a,b 的不同情况，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a},$$

所以当 $b<a$，即 $b/a<1$ 时，级数收敛；当 $b>a$，即 $b/a>1$ 时，级数发散；当 $b=a$，即 $b/a=1$ 时，用此法不能确定级数的收敛性.

4. 判定下列级数的收敛性.

(1) $\dfrac{3}{4}+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\cdots+n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\cdots$; (2) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\cdots$; (6) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2a+b}+\cdots+\dfrac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=\dfrac{3}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\dfrac{3}{4}\cdot 1=\dfrac{3}{4}<1$，所以该级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^4}{(n+1)!}\Big/\dfrac{n^4}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4\right]=0\cdot 1^4=0<1$，所以该级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1>0$，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，知题设级数也发散.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\Big/\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\pi/3^n)}{\pi/3^n}=\pi\cdot 1=\pi$，由几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\left(0<\dfrac{2}{3}<1\right)$ 收敛，知题设级数也收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=1\neq 0$，所以题设级数发散.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{na+b}\Big/\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{na+b}=\dfrac{1}{a}>0$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的发散性，知题设级数也发散.

5. 判定下列级数是否收敛. 如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$；

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}+\cdots$；

(4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$；　　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解　(1) 此级数的绝对值级数是发散的 $p-$ 级数 $(p=1/2<1)$；但它自身又是莱布尼兹型的交错级数（即满足莱布尼兹审敛定理两个条件的交错级数），事实上，

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1},\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

所以题设交错级数收敛，且为条件收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3^n}\Big/\dfrac{n}{3^{n-1}}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{3}<1$，所以绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，从而原级数绝对收敛.

(3) 变题设级数为 $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^n}$，显然，此级数的绝对值级数是收敛的几何级数（公比 $q:0<q=1/2<1$），故此级数绝对收敛，乘以 $1/3$ 仍绝对收敛，故原级数绝对收敛.

(4) 先考察绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$，因为 $\dfrac{1}{\ln(1+n)}>\dfrac{1}{1+n}$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$ 也发散；而原级数是莱布尼兹型级数，事实上，

$$u_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{\ln(2+n)}=u_{n+1},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0,$$

所以原级数收敛，且为条件收敛.

(5) 先考察绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$，因为

$$|u_n|=\frac{2^{n^2}}{n!}=\frac{(2^n)^n}{n!}=\frac{\left[(1+1)^n\right]^n}{n!}>\frac{(1+n)^n}{n!}>\frac{n^n}{n!}=\frac{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}>1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故原级数发散.

习题 12-3

1. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 4}+\dfrac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\dfrac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

(5) $\dfrac{2}{2}x+\dfrac{2^2}{5}x^2+\dfrac{2^3}{10}x^3+\cdots+\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

分析: 求出收敛半径 R，从而可得收敛区间 $(-R,R)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，所以收敛半径 $R=1/1=1$，于是幂级的收敛区间为 $(-1,1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1$，所以 $R=1/1=1$. 所以收敛区间为 $(-1,1)$.

(3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\Big/\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2(n+1)\right]=+\infty$，故收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n\cdot 3^n}\Big/\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)=3$. 故幂级数的收敛区间是 $(-3,3)$.

(5) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n}{n^2+1}\Big/\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right|=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$.

所以幂级数的收敛区间是 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big/\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|=x^2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3}=x^2$，所以当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛; 当 $|x|>1$ 时，绝对值级数发散，知原级数也发散; 所以幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

(7) 分析: 这也是缺项的幂级数，可用上题的方法解之; 这里我们换一种方法，用换元法解之.

令 $y=x^2$，则原幂级数成为不缺项的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}y^{n-1}$，设其各项系数为 b_n，因为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2^n}\Big/\frac{2n+1}{2^{n+1}}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=2,$$

所以 $-2<y<2\Rightarrow 0\leqslant x^2<2$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. 故原幂级数的收敛区间是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) 令 $y=x-5$，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}y^n$，因为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=1,$$

所以 $-1<y<1\Rightarrow -1<x-5<1$，即 $4<x<6$. 所以幂级数的收敛区间是 $(4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(3) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

分析: 观察通项系数与幂指数的联系，并与已知和函数的几何级数求和公式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,(|x|<1) \tag{*}$$

相比较，不难确定是先逐项求导还是先逐项积分.

解 (1) 先逐项积分便于利用上述求和公式(*). 因为

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}(|x|<1),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}(|x|<1)$.

(2) 先逐项求导便于利用已知求和公式. 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4}(|x|<1),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}&=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{-(1-x^4)+1}{1-x^4}\\&=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\arctan x-x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}(|x|<1).\end{aligned}$$

(3) 与上题类似，应先逐项求导. 因为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

所以原式 $=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}(|x|<1)$.

(4) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}-\dfrac{2x^4}{1-x}(|x|<1)$，逐项积分得

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+4)x^{n+3}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+4}=\frac{x^5}{1-x}(|x|<1),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}=\left(\frac{x^5}{1-x}\right)'=\frac{5x^4-4x^5}{(1-x)^2}(|x|<1),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n+3}-2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+3}$$
$$=\frac{5x^4-4x^5}{(1-x)^2}-\frac{2x^4}{1-x}=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}=\frac{x^2}{(1-x)^2}-x^2-2x^3\,(|x|<1).$$

习题 12-4

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于该函数.

解 $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),(n=1,2,\cdots)$，从而 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

又因 $|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi\right]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},(0<\theta<1)$，

而 $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项，所以有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$，于是 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，

所以 $\cos x=\cos x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n,x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间.

(1) $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) $\ln(a+x)(a>0)$；

(3) a^x；　　(4) $\sin^2 x$；

(5) $(1+x)\ln(1+x)$；　　(6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\frac{x^n}{n!}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(x\in\mathbb{R}).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln\left[a\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$

$$=\ln a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\left(-1<\frac{x}{a}\leqslant 1,\ 即-a<x\leqslant a\right).$$

(3) $a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n(-\infty<x\ln a<+\infty$，即 $-\infty<x<+\infty)$.

(4) $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}(x\in\mathbb{R}).$$

(5) $(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]x^{n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n+(-1)^{n-1}(n+1)}{n(n+1)}x^{n+1}\right]$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}(-1<x\leqslant 1).$$

(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha=-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=x\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^4+\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots-\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\cdots\right]$$

$$=x-\frac{x^3}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}(-1<x<1).$$

注：当 $x=\pm 1$ 时，上列级数也收敛.

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 幂级数，并求展开式成立的区间.

(1) $\sqrt{x^3}$；　　(2) $\lg x$.

解 (1) 由二项式级数展开式，有

$$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}}\left(\alpha=\frac{3}{2}\right)$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{3\cdot 1}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{3\cdot 1\cdot(-1)(-3)\cdots(-2n+5)}{2^n\cdot 2!}(x-1)^n$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+2}\cdot 2!}(x-1)^{n+2}$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n\cdot(2n)!}{2^{n+2}\cdot 2^n\cdot n!(n+2)!}(x-1)^{n+2}$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},$$

其中，$-1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$.

注：二项式级数的公共收敛域为$(-1,1)$；当$(1+x)^{\alpha}$中的α取不同数值时，其收敛区间的各情形比较复杂，各不相同. 可以证明（证略）.

当$\alpha>0$时，收敛域为$[-1,1]$；当$\alpha\leqslant -1$时，收敛域为$(-1,1)$；当$-1<\alpha<0$时，收敛域为$(-1,1]$.

本题的$\alpha=\frac{3}{2}>0$，实际收敛域为$[0,2]$.

(2) 由对数换底公式和对数级数展开式，

$$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},$$

其中，$-1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$.

4. 将函数$f(x)=\cos x$展开成$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的幂级数.

解 $$\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],$$

其中，$-\infty<x+\frac{\pi}{3}<+\infty\Rightarrow x\in\mathbb{R}$.

5. 将函数$f(x)=\frac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.

解 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n,$$

其中，$-1<\frac{x-3}{3}<1\Rightarrow 0<x<6$.

6. 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展形成$(x+4)$的幂级数.

解 $$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{-2+(x+4)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n;$$

其中，$-1<\dfrac{x+4}{2}<1$ 且 $-1<\dfrac{x+4}{3}<1$，即 $-6<x<-2$ 且 $-7<x<-1$，

由 $(-6,-2)\cap(-7,-1)=(-6,-2)$，故上述幂级数的收敛区间为 $(-6,-2)$.

习题 12-5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值.

(1) $\ln 3$（误差不超过 0.0001）； (2) $\sqrt{e}$（误差不超过 0.001）；

(3) $\sqrt[9]{522}$（误差不超过 0.00001）； (4) $\cos 2^{\circ}$（误差不超过 0.0001）.

解 (1) 把公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots\ (-1<x\leqslant 1),$$

中的 x 换成 $-x$，得

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\ (-1\leqslant x<1),$$

两式相减，得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right)(-1<x<1).$$

令 $\dfrac{1+x}{1-x}=3$，得 $x=\dfrac{1}{2}$. 把 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入最后一个展开式，得

$$\ln 3=\ln\frac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots\right).$$

如果取前 n 项作为 $\ln 3$ 的近似值，则截断误差为

$$|r_n|=2\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\cdot\frac{1}{2^{2n+3}}+\frac{1}{2n+5}\cdot\frac{1}{2^{2n+5}}+\cdots\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\left(1+\frac{2n+1}{2n+3}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}}+\frac{2n+1}{2n+5}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+5}}+\cdots\right)$$

$$<2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^2}}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{1}{3}.$$

当 $n=5$ 时，

$$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012,$$

不符合题意. 当 $n=6$ 时,

$$|r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003\,,$$

符合题意, 于是取

$$\begin{aligned}\ln 3&\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}}\right)\\&=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^8}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{10}}.\end{aligned}$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}\approx 0.08333\,,\quad \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^4}=0.01250\,,\quad \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^6}\approx 0.00223\,,$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^8}\approx 0.00043\,,\quad \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{10}}\approx 0.00009\,.$$

因此得

$$\ln 3\approx 1.09858\approx 1.0986\,.$$

(2) 由公式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$, 得

$$\sqrt{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

如果取前 n 项作为 $\sqrt{\mathrm{e}}$ 的近似值, 则截断误差为

$$\begin{aligned}|r_n|&=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots\\&=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}+\frac{n!}{(n+2)!}\cdot\frac{2^n}{2^{n+2}}+\cdots\right]\\&<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2(n+1)}}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2(n+1)}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

当 $n=5$ 时,

$$|r_5|<\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{12}{11}<0.0003\,.$$

符合题意, 于是取

$$\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}\,.$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}=0.125\,,\quad \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0208\,,\quad \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}\approx 0.0026\,,$$

因此得

$$\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1.6484\approx 1.648\,.$$

(3) $\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{512+10}=2\left(1+\dfrac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$, 由公式

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

令 $x=\dfrac{10}{2^9}$, $m=\dfrac{1}{9}$, 得

$$\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}=1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^n+\cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}\sqrt[9]{522}&=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}\\&=2+2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+2\cdot\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\cdots+2\cdot\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^n+\cdots\\&=2+2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-2\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 8\cdot\cdots\cdot(9n-10)}{9^n\cdot n!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^n+\cdots.\end{aligned}$$

上式等号右端从第二项开始为一交错级数, 如果取前三项作为 $\sqrt[9]{522}$ 的近似值, 则截断误差为

$$|r_3|\leqslant 2\cdot\frac{1\cdot 8\cdot 17}{9^3\cdot 3!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^3<4.64\times 10^{-7}\,,$$

符合题意, 于是取

$$\sqrt[9]{522}\approx 2+2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-2\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2\,,$$

同样, 考虑到舍入误差, 计算时应取六位小数:

$$2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}\approx 0.004340\,,\quad 2\cdot\frac{1\cdot 8}{9^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2\approx 0.000038\,,$$

因此得

$$\sqrt[9]{522}\approx 2.004302\approx 2.00430\,.$$

(4) $\cos 2^\circ=\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{180}\right)=\cos\dfrac{\pi}{90}$, 由公式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

令 $x=\dfrac{\pi}{90}$，得

$$\cos 2^\circ = 1-\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^{2n}+\cdots.$$

上式等号右端为一交错级数，如果取前两项作为 $\cos 2^\circ$ 的近似值，则截断误差为

$$|r_3|\leqslant\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^4<6.2\times10^{-8},$$

符合题意，于是取

$$\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2,$$

同样，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数，因此得

$$\cos 2^\circ\approx 1-0.00061=0.99939\approx 0.9994 .$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值.

(1) $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.0001）；　(2) $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$（误差不超过 0.001）.

解　(1) 由公式

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1-(-x^4)}=1-x^4+x^8-\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots(-1<x<1),$$

逐项积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x&=\int_0^{0.5}\left[1-x^4+x^8-\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{0.5}1\mathrm{d}x-\int_0^{0.5}x^4\mathrm{d}x+\int_0^{0.5}x^8\mathrm{d}x-\cdots+(-1)^n\int_0^{0.5}x^{4n}\mathrm{d}x+\cdots\\&=0.5-\frac{1}{5}\cdot0.5^5+\frac{1}{9}\cdot0.5^9-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{4n+1}\cdot0.5^{4n+1}+\cdots.\end{aligned}$$

上式等号右端为一交错级数，如果取前三项作为 $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的近似值，则截断误差为

$$|r_3|\leqslant\frac{1}{13}\cdot0.5^{13}<9.4\times10^{-6},$$

符合题意，于是取

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\approx0.5-\frac{1}{5}\cdot0.5^5+\frac{1}{9}\cdot0.5^9,$$

同样，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数，因此得

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\approx0.5-0.00625+0.00022=0.49397\approx0.4940 .$$

(2) 由公式

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n\cdot x^{2n}+\cdots(-1<x<1),$$

逐项积分，得

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^x \left[1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^x 1\mathrm{d}x - \int_0^x x^2\mathrm{d}x + \int_0^x x^4\mathrm{d}x - \cdots + (-1)^n \int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x + \cdots,$$

即

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot x^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n+1} + \cdots \ (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

因而

$$\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{1}{3}\cdot x^2 + \frac{1}{5}\cdot x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n} + \cdots,$$

逐项积分，得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{0.5}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot x^2 + \frac{1}{5}\cdot x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n} + \cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{0.5} 1\mathrm{d}x - \int_0^{0.5} \frac{1}{3}\cdot x^2\mathrm{d}x + \int_0^{0.5} \frac{1}{5}\cdot x^4\mathrm{d}x - \cdots + \int_0^{0.5} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}\cdot x^{2n}\mathrm{d}x + \cdots$$

$$= 0.5 - \frac{1}{3^2}\cdot 0.5^3 + \frac{1}{5^2}\cdot 0.5^5 - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot 0.5^{2n+1} + \cdots.$$

上式等号右端为一交错级数，如果取前三项作为 $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，则截断误差为

$$|r_2| \leqslant \frac{1}{7^2}\cdot 0.5^7 < 1.6\times 10^{-4},$$

符合题意，于是取

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x \approx 0.5 - \frac{1}{3^2}\cdot 0.5^3 + \frac{1}{5^2}\cdot 0.5^5.$$

同样，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数，因此得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x \approx 0.5 - 0.0139 + 0.0013 = 0.4874 \approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解.

(1) $y' - xy - x = 1$;　　(2) $y'' + xy' + y = 0$;　　(3) $(1-x)y' = x^2 - y$.

解　(1) 设方程的解为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

则

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

代入方程，得

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots) - x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) - x = 1,$$

即

$$a_1+(2a_2-a_0-1)x+(3a_3-a_1)x^2+\cdots+\left[(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}\right]x^n+\cdots=1.$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$a_1=1,\ 2a_2-a_0-1=0,\ 3a_3-a_1=0,\ \cdots,\ (n+1)a_{n+1}-a_{n-1}=0,\ \cdots.$$

于是有

$$a_1=1,\ a_3=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3},\ a_5=\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{3\cdot 5},\ \cdots,$$

$$a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}a_{2n-3}=\frac{1}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)},\ \cdots;$$

$$a_2=\frac{1}{2}(a_0+1),\ a_4=\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{2\cdot 4}(a_0+1),\ a_6=\frac{1}{6}a_4=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}(a_0+1),\ \cdots,$$

$$a_{2n}=\frac{1}{2n}a_{2n-2}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}(a_0+1),\ \cdots.$$

因而

$$\begin{aligned}&a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots\\&=-1+(a_0+1)+\frac{1}{2}(a_0+1)x^2+\frac{1}{2\cdot 4}(a_0+1)x^4+\cdots+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}(a_0+1)x^{2n}+\cdots\\&=-1+(a_0+1)\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\cdots\right]\\&=-1+(a_0+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty,\ a_0\text{ 为任意常数});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots\\&=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{1}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}x^{2n-1}+\cdots\\&=x+\frac{1}{3!!}x^3+\frac{1}{5!!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}+\cdots(-\infty<x<+\infty).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}y&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots)+(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)\\&=-1+(a_0+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+\left[x+\frac{1}{3!!}x^3+\frac{1}{5!!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}+\cdots\right]\\&=C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+\left[-1+x+\frac{1}{3!!}x^3+\frac{1}{5!!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}+\cdots\right],\end{aligned}$$

（$-\infty<x<+\infty$，C 为任意常数.）

(2) 设方程的解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

则

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots,$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned}&(2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots)\\&+x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots)\\&+(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) = 0,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(2a_2 + a_0) + (3\cdot 2a_3 + 2a_1)x + (4\cdot 3a_4 + 3a_2)x^2 + \cdots\\&+\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\right]x^n + \cdots = 0.\end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$2a_2 + a_0 = 0,\ 3\cdot 2a_3 + 2a_1 = 0,\ 4\cdot 3a_4 + 3a_2 = 0,\ \cdots,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0,\ \cdots.$$

于是有

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_1,\ a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{3\cdot 5}a_1,\ \cdots,$$

$$a_{2n-1} = -\frac{1}{2n-1}a_{2n-3} = \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}a_1,\ \cdots;$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0,\ a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{2\cdot 4}a_0,\ a_6 = -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}a_0,\ \cdots,$$

$$a_{2n} = -\frac{1}{2n}a_{2n-2} = \frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}a_0,\ \cdots.$$

因而

$$\begin{aligned}&a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \cdots\\&= a_0 - \frac{1}{2}a_0x^2 + \frac{1}{2\cdot 4}a_0x^4 - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}a_0x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}a_0x^{2n} + \cdots\\&= a_0\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n + \cdots\right]\\&= a_0\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad (-\infty < x < +\infty,\ a_0\text{为任意常数});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots\\&= a_1x - \frac{1}{3}a_1x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}a_1x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}a_1x^{2n-1} + \cdots\\&= a_1\left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}x^{2n-1} + \cdots\right]\end{aligned}$$

$$=a_1\left[x-\frac{1}{3!!}x^3+\frac{1}{5!!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!!}x^{2n-1}+\cdots\right],$$

（$-\infty<x<+\infty$，a_1 为任意常数）.

所以

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots)+(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)$$

$$=a_0\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\left[x-\frac{1}{3!!}x^3+\frac{1}{5!!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!!}x^{2n-1}+\cdots\right],$$

（$-\infty<x<+\infty$，a_0，a_1 为任意常数）.

(3) 设方程的解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

则

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

代入方程, 得

$$(1-x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)=x^2-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots),$$

即

$$a_1+(2a_2-a_1)x+(3a_3-2a_2)x^2+\cdots+\left[(n+1)a_{n+1}-na_n\right]x^n+\cdots$$

$$=-a_0-a_1x-(a_2-1)x^2-\cdots-a_nx^n-\cdots.$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$a_1=-a_0,\quad 2a_2-a_1=-a_1,\quad 3a_3-2a_2=-(a_2-1),$$

$$4a_4-3a_3=-a_3\ \cdots,\quad (n+1)a_{n+1}-na_n=-a_n,\quad \cdots.$$

于是有

$$a_1=-a_0,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{3}(a_2+1)=\frac{1}{3},\quad a_4=\frac{2}{4}a_3=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4},\quad \cdots,$$

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\ (n\geqslant 3),\quad \cdots.$$

所以

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$=a_0-a_0x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots$$

$$=a_0(1-x)+2\left[\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}x^n+\cdots\right],$$

（$-1\leqslant x\leqslant 1$，a_0 为任意常数）.

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y'=y^2+x^3$，$y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$；　　(2) $(1-x)y'+y=1+x$，$y\big|_{x=0}=0$.

解　(1) 设方程的解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

由 $y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 得，$a_0=\dfrac{1}{2}$. 逐项求导得

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

代入方程，得

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)^2+x^3,$$

即

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\\&\quad=a_0a_0+(a_0a_1+a_1a_0)x+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^2\\&\qquad+(a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0+1)x^3+\cdots+(a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0)x^n+\cdots.\end{aligned}$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$a_1=a_0a_0,\quad 2a_2=a_0a_1+a_1a_0,\quad 3a_3=a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0,$$
$$4a_4=a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0+1,\ \cdots,\ (n+1)a_{n+1}=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0,\ \cdots.$$

于是有

$$a_1={a_0}^2=\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{2}(a_0a_1+a_1a_0)=\frac{1}{8},\ a_3=\frac{1}{3}(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)=\frac{1}{16},$$
$$a_4=\frac{1}{4}(a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0)+\frac{1}{4}=\frac{1}{32}+\frac{1}{4}=\frac{9}{32},\ \cdots.$$

所以所求解的幂级数展开式的开始几项为

$$\begin{aligned}y&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.\end{aligned}$$

(2) 设方程的解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

由 $y\big|_{x=0}=0$ 得，$a_0=0$. 逐项求导得

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

代入方程，得

$$\begin{aligned}&(1-x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)\\&\quad+(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)=1+x,\end{aligned}$$

即

$$(a_1+a_0)+2a_2x+(3a_3-a_2)x^2+\cdots+\left[(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n\right]x^n+\cdots=1+x.$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，得

$$a_1+a_0=1,\ 2a_2=1,\ 3a_3-a_2=0,\ \cdots,\ (n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0,\ \cdots.$$

于是有

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2\cdot 3},\ a_4=\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 4},\ \cdots,$$

$$a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\ (n\geqslant 2),\ \cdots.$$

所以

$$\begin{aligned}y&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}x^n+\cdots.\end{aligned}$$

5. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$，并利用此结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 将

$$y=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

代入方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的左边，得

$$\begin{aligned}y''+y'+y&=\left[x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots\right]\\&\quad+\left[\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots\right]+\left[1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\right]\\&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\mathrm{e}^x,\end{aligned}$$

与右边相等. 又当 $x=0$ 时，$y=1$，$y'=0$，所以 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 为微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 满足初值条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解. 这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，且 e^x 是 $\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中 $\lambda=1$，$P_m(x)=1$. 与此方程对应的齐次方程为

$$y''+y'+y=0,$$

其特征方程为

$$r^2+r+1=0,$$

其根 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为一对共轭复根，于是与所给方程对应的齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

由于 $\lambda=1$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=a\mathrm{e}^x,$$

把它代入所给方程，得

$$3a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x,$$

解得 $a=\frac{1}{3}$，因此求得一个特解为

$$y^*=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x,$$

从而所给方程的的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

将条件 $y\big|_{x=0}=1$ 代入通解，得 $C_2=\frac{2}{3}$，从而

$$y=C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x,$$

将上式对 x 求导，得

$$y'=C_1\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x,$$

再把条件 $y'\big|_{x=0}=0$ 代入上式，得 $C_1=0$，从而所求特解为

$$y=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

6. 利用欧拉公式将函数 $\mathrm{e}^x\cos x$ 的展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,$$

及

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right),$$

得

$$\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x(\cos x+\mathrm{i}\sin x)=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}x\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=1+\sqrt{2}x\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left[\sqrt{2}x\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\left[\sqrt{2}x\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n+\cdots$$

$$=1+\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)+\frac{1}{2!}\cdot\left[\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot(\sqrt{2}x)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\left[\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot(\sqrt{2}x)^n+\cdots$$

$$=\left[1+\cos\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2}x)+\frac{1}{2!}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^n+\cdots\right]$$

$$+\mathrm{i}\left[\sin\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2}x)+\frac{1}{2!}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^n+\cdots\right].$$

比较上式两端复数的实部，得

$$\mathrm{e}^x\cos x=1+\cos\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2}x)+\frac{1}{2!}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2}x)^n+\cdots$$

$$=1+\cos\frac{\pi}{4}\cdot(\sqrt{2})\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2})^2\cdot x^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot(\sqrt{2})^n\cdot x^n+\cdots(-\infty<x<+\infty).$$

*习题 12-6

1. 已知函数序列 $s_n(x)=\sin\frac{x}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 0 .

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大，能使当 $n>N$ 时，$s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε ;

(2) 证明 $s_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解 (1) 因为 $|s_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|\frac{x}{n}\right|=\frac{|x|}{n}$，对于正数 ε，欲使 $|s_n(x)-0|<\varepsilon$ 成立，只要 $\frac{|x|}{n}<\varepsilon$ 成立即可，即 $n>\frac{|x|}{\varepsilon}$. 取正整数 $N=\left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，$|s_n(x)-0|<\varepsilon$，即 $s_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε .

(2) 设 x 为有限区间 $[a,b]$ 上任意一点，取 $M=\max\{|a|,|b|\}$，则 $|x|\leqslant M$,

$$|s_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{M}{n},$$

对于任意给定的正数ε，欲使$|s_n(x)-0|<\varepsilon$成立，只要$\dfrac{M}{n}<\varepsilon$成立即可，即$n>\dfrac{M}{\varepsilon}$. 取正整数$N=\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时，$|s_n(x)-0|<\varepsilon$成立，即$s_n(x)$在任一有限区间$[a,b]$上一致收敛.

2. 已知级数$x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问$N(\varepsilon,x)$取多大，能使当$n>N$时，级数的余项r_n的绝对值小于正数ε;

(3) 分别讨论级数在区间$[0,1]$，$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上的一致收敛性.

解 (1) 级数为等比级数，公比为$\dfrac{1}{1+x^2}$，

当$x\neq 0$时，$\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|<1$，级数的和为

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2;$$

当$x=0$时，级数的和为$s(0)=0$. 所以

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$$

(2) $r_n=r_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots$为等比级数，公比为$\dfrac{1}{1+x^2}$.

当$x\neq 0$时，$\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right|<1$，级数的和为

$$r_n(x)=\frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}};$$

当$x=0$时，级数的和为$r_n(0)=0$. 所以

$$r_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, x\neq 0;\\ 0, \qquad\qquad x=0.\end{cases}$$

当$x=0$时，$|r_n(0)|=0$，对于正数ε，及任意正整数N，当$n>N$时，$|r_n(0)|<\varepsilon$;

当 $x\neq 0$ 时，$|r_n(x)|=\left|\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right|=\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$，对于正数$\varepsilon$，欲使$|r_n(x)|<\varepsilon$成立，即$\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\varepsilon$，故$(1+x^2)^{n-1}>\dfrac{1}{\varepsilon}$，因此 $(n-1)\ln(1+x^2)>-\ln\varepsilon$，所以 $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}$，取正整数$N=\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]+1$，当$n>N$时，$|r_n(x)|<\varepsilon$，即级数的余项$r_n$的绝对值小于正数$\varepsilon$.

(3) 因为级数的各项 $u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在区间 $[0,1]$ 上都连续，若级数在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 $s(x)=\begin{cases}1+x^2, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$，由定理1知，$s(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上也连续.

然而 $s(x)$ 在 $x=0$ 点不连续，所以级数在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛.

在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上，

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

对于正数 ε，欲使 $|r_n(x)|<\varepsilon$ 成立，即 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<\varepsilon$. 即 $(n-1)\ln\dfrac{4}{5}<\ln\varepsilon$，即 $n>1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 5-\ln 4}$，取 $N=\left[1-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 5-\ln 4}\right]+1$，当 $n>N$ 时，$|r_n(x)|<\varepsilon$，所以级数在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$，$-\infty<x<+\infty$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，$0<x<1$.

解 (1) 级数为交错级数，且满足莱布尼茨定理，级数收敛.

$$|r_n(x)|\leqslant\left|(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\right|=\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}<\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$
$$=\frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}}<\frac{x^2}{nx^2}=\frac{1}{n},$$

设 x 为 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点，对于任意给定的正数 ε，欲使 $|r_n(x)|<\varepsilon$ 成立，只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立即可，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 取正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，$|r_n(x)|<\varepsilon$ 成立，即级数在所给区间上一致收敛.

(2) 当 $0<x<1$ 时，级数的部分和为

$$s_n(x)=(1-x)+(1-x)x+(1-x)x^2+\cdots+(1-x)x^n=1-x^{n+1},$$

和函数为

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x^{n+1})=1.$$

于是

$$|r_n(x)|=|s(x)-s_n(x)|=|1-(1-x^{n+1})|=x^{n+1}.$$

对于任意给定的正数 n，取 $x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ ($n=1,2,3,\cdots$)，则 x_n 在 $(0,1)$ 内，且

$$|r_n(x)|=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1}=\frac{1}{2},$$

所以，只要取 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，在 $(0,1)$ 内，总存在这样的点 x_n，使得 $|r_n(x_n)|>\varepsilon$，因此所给级数在所给区间上不一致收敛.

4. 利用维尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n}$，$-\infty<x<+\infty$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，$-\infty<x<+\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$，$0\leqslant x<+\infty$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}$，$|x|<10$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}$，$0\leqslant x<+\infty$.

解 (1) 对于 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x，

$$|u_n|=\left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,3,\cdots),$$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数，收敛，由维尔斯特拉斯判别法，原级数在所给区间上一致收敛.

(2) 对于 $(-\infty,+\infty)$ 上任意一点 x，

$$|u_n|=\left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}=\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 是 $p=\frac{4}{3}>1$ 的 p 级数，收敛，由维尔斯特拉斯判别法，原级数在所给区间上一致收敛.

(3) 对于 $0\leqslant x<+\infty$ 上任意一点 x，

$$|u_n(x)|=x^2\mathrm{e}^{-nx}=\frac{x^2}{\mathrm{e}^{nx}}=\frac{x^2}{1+nx+\frac{1}{2!}(nx)^2+\cdots}<\frac{x^2}{\frac{1}{2!}(nx)^2}=\frac{2}{n^2},$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是 $p=2>1$ 的 p 级数，收敛，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，由维尔斯特拉斯判别法，原级数在所给区间上一致收敛.

(4) 对于 $(-10,10)$ 上任意一点 x，

$$|u_n(x)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n!}=\frac{(\mathrm{e}^{-x})^n}{n!}\leqslant\frac{(\mathrm{e}^{10})^n}{n!},$$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{10})^n}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{10}}-1$，收敛，由维尔斯特拉斯判别法，原级数在所给区间上一致收敛.

(5) 对于$0 \leqslant x < +\infty$上任意一点x,

$$|u_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right| = \frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1-e^{-nx}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是$p=2>1$的$p$级数，收敛，由维尔斯特拉斯判别法，原级数在所给区间上一致收敛.

习题 12-7

1. 下列周期函数$f(x)$的周期为2π，试将$f(x)$展开成傅里叶级数，如果$f(x)$在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

(1) $f(x)=3x^2+1 \quad (-\pi \leqslant x < \pi)$;

(2) $f(x)=e^{2x} \quad (-\pi \leqslant x < \pi)$;

(3) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi \leqslant x < 0; \\ ax, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$ （a,b为常数，且$a>b>0$）.

解 (1) 由收敛定理得，函数$f(x)$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上收敛于$f(x)$.

函数$f(x)$为偶函数，计算傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)dx = 2(\pi^2+1),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2+1)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{n}x^2\sin(nx)+\frac{6}{n^2}x\cos(nx)-\frac{6}{n^3}\sin(nx)+\frac{1}{n}\sin(nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= (-1)^n\frac{12}{n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n = 0 \ (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数$f(x)$的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$$

$$= \pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)(-\infty < x < +\infty).$$

(2) 由收敛定理得，函数$f(x)$的傅里叶级数，当$x \neq (2n+1)\pi \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，收敛于$f(x)$；当$x=(2n+1)\pi \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-2\pi}+e^{2\pi}}{2}.$$

计算傅里叶系数如下:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}dx = \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi}),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos(nx)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi(4+n^2)}\mathrm{e}^{2x}\left[n\sin(nx)+2\cos(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=(-1)^n\frac{2(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin(nx)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi(4+n^2)}\mathrm{e}^{2x}\left[2\sin(nx)-n\cos(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(4+n^2)\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2}\left[2\cos(nx)-n\sin(nx)\right]\right\},$$
$$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(3) 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{-b\pi+a\pi}{2}=\frac{(a-b)\pi}{2}.$$

计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\mathrm{d}x=\frac{(a-b)\pi}{2},$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}ax\cos(nx)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)+\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)+\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$
$$=\frac{(b-a)\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} bx\sin(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ax\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(b+a)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$=\frac{(a-b)\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(b-a)\left[1-(-1)^n\right]}{n^2\pi}\cos(nx)+(-1)^{n-1}\frac{a+b}{n}\sin(nx)\right\},$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & -\pi\leqslant x<0;\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

解　(1) 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上收敛于 $f(x)$；当 $x=\pm\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\frac{\pi}{3}}{2}=0.$$

若不计 $x=(2n+1)\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{3}{1+3n}\sin\left(\frac{1+3n}{3}x\right)+\frac{3}{1-3n}\sin\left(\frac{1-3n}{3}x\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{18\sqrt{3}n}{(9n^2-1)\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{9n^2-1}\sin(nx)\quad(-\pi<x<\pi).$$

(2) 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(-\pi,\pi)$ 上收敛于 $f(x)$；当 $x=\pm\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot dx=1+\frac{1-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\cos(nx)dx$$

$$=\frac{1}{\pi(1+n^2)}e^x\left[\cos(nx)+n\sin(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{(1+n^2)\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin(nx)dx$$

$$=\frac{1}{\pi(1+n^2)}e^x\left[\sin(nx)-n\cos(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{(1+n^2)\pi}+\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos(nx)+\left[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin(nx)\right\},$$

$(-\pi<x<\pi)$.

3. 将函数 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解 将函数 $f(x)$ 作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数, 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\frac{1}{2n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

4. 设 $f(x)$ 的周期为 2π 周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2};\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

若不计 $x=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，函数 $f(x)$ 是奇函数，计算傅里叶系数如下:

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(nx)\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\cos(nx)\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2n}\right]\ (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}\right]\sin(nx)$$

$$(x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解 将函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(0,\pi]$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x=0$ 时, 收敛于

$$\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

若不计 $x=2n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cos(nx)-\frac{1}{2n^2}\sin(nx)+\frac{1}{2n}x\cos(nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)\quad(0<x\leqslant\pi).$$

6. 将函数 $f(x)=2x^2$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0,\pi)$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x=\pi$ 时, 收敛于

$$\frac{-2\pi^2+2\pi^2}{2}=0.$$

若不计 $x=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos(nx)+\frac{2}{n^2}x\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)-\frac{2}{n^3}\right]\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)-\frac{2}{n^3}\right]\sin(nx)\quad (0\leqslant x<\pi).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin(nx)+\frac{2}{n^2}x\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\frac{2\pi^2}{3}+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos(nx)\quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π, 证明:

(1) 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0$, $(k=1,2,3,\cdots)$;

(2) 如果 $f(x-\pi)=f(x)$, 则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0$, $(k=1,2,3,\cdots)$.

证明 (1) 因为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,$$

令 $u=x-\pi$, 即 $x=u+\pi$, 又 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\mathrm{d}x=-\int_{-\pi}^{0}f(u)\mathrm{d}u=-\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $a_0=0$.

因为

$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x,$$

令 $u=x-\pi$, 即 $x=u+\pi$, 又 $f(x-\pi)=-f(x)$, 则

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\cos(2kx)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(2k\pi+2ku)\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos(2ku)\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x\,,$$

所以 $a_{2k}=0$.

因为

$$b_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x,$$

令 $u=x-\pi$，即 $x=u+\pi$，又 $f(x-\pi)=-f(x)$，则

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\sin(2kx)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(2k\pi+2ku)\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(u)\sin(2ku)\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2kx)\mathrm{d}x\,,$$

所以 $b_{2k}=0$.

(2) 因为

$$a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x,$$

令 $u=x-\pi$，即 $x=u+\pi$，又 $f(x-\pi)=f(x)$，则

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x-\pi)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos\left[(2k+1)\pi+(2k+1)u\right]\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(u)\cos\left[(2k+1)u\right]\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x\,,$$

所以 $a_{2k+1}=0$.

因为

$$b_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x,$$

令 $u=x-\pi$，即 $x=u+\pi$，又 $f(x-\pi)=f(x)$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f(x)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}f(x-\pi)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin\left[(2k+1)\pi+(2k+1)u\right]\mathrm{d}u\\&=-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin\left[(2k+1)u\right]\mathrm{d}u\\&=-\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left[(2k+1)x\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $b_{2k+1}=0$.

习题 12-8

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数（下面给出函数在一个周期内的表达式）.

(1) $f(x)=1-x^2\quad\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0;\\ 1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2};\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1.\end{cases}$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0;\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$

解 (1) 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$.

函数 $f(x)$ 为偶函数，$l=\dfrac{1}{2}$，计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)-\frac{1}{2n\pi}x^2\sin(2n\pi x)-\frac{2}{(2n\pi)^2}x\cos(2n\pi x)+\frac{2}{(2n\pi)^3}\sin(2n\pi x)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=4\left[-\frac{2}{(2n\pi)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(n\pi)\right]=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$b_n=0\ (n=1,2,3,\cdots)$.

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(2) 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq 2k$, $x\neq 2k+\frac{1}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=2k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2};$$

当 $x=2k+\frac{1}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}^+\right)+f\left(\frac{1}{2}^-\right)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

$l=1$，计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2},$$
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(2n\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{0}x\cos(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\cos(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cdot\cos(n\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)+\frac{1}{n\pi}x\sin(n\pi x)\right]\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(2n\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{0}x\sin(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\sin(n\pi x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cdot\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\sin(n\pi x)-\frac{1}{n\pi}x\cos(n\pi x)\right]\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right]\cos(n\pi x)+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin(n\pi x)\right\},$$

$$\left(x\neq 2k,x\neq 2k+\frac{1}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

(3) 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq 3(2k+1)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=3(2k+1)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(-3^+)+f(3^-)}{2}=\frac{-5+1}{2}=-2.$$

$l=3$，计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}1\mathrm{d}x=-1,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cdot 3^2}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{2\cdot 3}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]\Bigg|_{-3}^{0}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{0}^{3}$$

$$=6\cdot\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}1\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\cdot 3^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{3}-\frac{2\cdot 3}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{3}-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]\Bigg|_{-3}^{0}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{0}^{3}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[1-(-1)^n\right]\frac{6}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$

$$(x\neq 3(2k+1),k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}; \\ l-x, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leq l. \end{cases}$　　(2) $f(x)=x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 2)$.

解 (1) 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 $2l$ 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0,l]$ 上, 收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\left[-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{2l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{4l\sin\dfrac{n\pi}{2}}{(n\pi)^2}=\begin{cases} 0, & n=2k; \\ \dfrac{4l}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & n=2k-1. \end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}\quad (0\leqslant x\leqslant l).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数.

法一 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 $2l$ 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0,l]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{l}\cdot x^2\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\frac{2}{l}\cdot\left(lx-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}=\frac{l}{2}\quad ,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2l}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}+\left[\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{2l}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=-\frac{2l\left[1+(-1)^n\right]}{(n\pi)^2}+\frac{4l\cos\frac{n\pi}{2}}{(n\pi)^2}=\begin{cases}0, & n=2m-1;\\ \frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^m-1}{(2m)^2}, & n=2m.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m-1;\\ 0, & n=2m=2\cdot 2k;\\ -\frac{2l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}, & n=2m=2\left(2k-1\right).\end{cases}\quad (n=1,2,3,\cdots;m=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l}\quad (0\leqslant x\leqslant l).$$

法二 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 l 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $\left[0,l\right]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{\frac{l}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\cdot x^2\Big|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{l}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{l}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{l}{2}}\mathrm{d}x=\frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{2n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{l}{(n\pi)^2}\cos\frac{2n\pi x}{l}+\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{l\left[(-1)^n-1\right]}{(n\pi)^2}=\begin{cases}0, & n=2k;\\ -\frac{2l}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2}, & n=2k-1.\end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\cdots;k=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\frac{l}{2}}=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l}\quad (0\leqslant x\leqslant l).$$

(2) 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 4 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $\left[0,2\right)$ 上, 收敛于 $f(x)$, 当 $x=2$ 时, 收敛于

$$\frac{-4+4}{2}=0.$$

若不计 $x=2(2k+1)\quad (n=0,1,2,\cdots)$, 延拓后的函数是奇函数, $l=2$, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{2\cdot 2^2}{(n\pi)^2}x\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{2\cdot 2^3}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{8}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{\pi^2 n^3}\right\}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{\pi^2 n^3}\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}\quad(0\leqslant x<2).$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，延拓后的函数是周期为 4 的周期函数. 由收敛定理得，延拓后的函数的傅里叶级数，在 $[0,2]$ 上收敛于 $f(x)$.

延拓后的函数是偶函数，$l=2$，计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{2}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{2\cdot 2^2}{(n\pi)^2}x\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2\cdot 2^3}{(n\pi)^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{16\cdot(-1)^n}{\pi^2 n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 2).$$

***3.** 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq 2k+1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=2k+1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}=\mathrm{ch}\,1.$$

$l=1$，计算傅里叶系数如下:

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}=\mathrm{sh}\,1,$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}n\pi)x}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}n\pi}-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}n\pi)}}{1+\mathrm{i}n\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}(-1)^n-\mathrm{e}^{-1}(-1)^n}{1+\mathrm{i}n\pi}=(-1)^n\mathrm{sh}1\frac{1-\mathrm{i}n\pi}{1+n^2\pi^2},\quad(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots).$$

于是，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式的复数形式为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}=\mathrm{sh}1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{1-\mathrm{i}n\pi}{1+n^2\pi^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x}\quad(x\neq2k+1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

***4.** 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数，已知它的傅里叶级数的复数形式为（参阅本节例题）

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\quad(-\infty<t<+\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式（即三角形式）.

解 法一 $u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}$

$$=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}+\frac{1}{-n}\sin\frac{-n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-2n\pi t}{T}}\right)$$

$$=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\left[\left(\cos\frac{2n\pi\tau t}{T}+\mathrm{i}\sin\frac{2n\pi\tau t}{T}\right)+\left(\cos\frac{-2n\pi\tau t}{T}+\mathrm{i}\sin\frac{-2n\pi\tau t}{T}\right)\right]$$

$$=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

法二 由 $u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}=c_0+\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}$ 知

$$c_0=\frac{h\tau}{T},\quad c_n=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},\quad c_{-n}=\frac{h}{-n\pi}\sin\frac{-n\pi\tau}{T}=c_n,$$

因为

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\quad\frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\quad\frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n},$$

所以

$$a_0=2c_0=\frac{2h\tau}{T},$$

$$a_n=c_n+c_{-n}=2c_n=\frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},$$

$$b_n=\frac{1}{-i}(c_n-c_{-n})=0.$$

因而

$$u(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

$$=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

总习题十二

1. 填空.

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的________条件，不是它收敛的________条件；

(2) 部分和数列 $\{s_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的________条件；

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定_________；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 必定________.

分析　若假言判断"若 A 则 B "为真，则称条件 A 是 B 的充分条件；
若假言判断"若 $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$ "（即若非 A 则非 B ）为真，则称条件 A 是 B 的必要条件；
若假言判断"若 A 则 B "和若" $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$ "同时为真，则称条件 A 是 B 的充要条件.

解　(1) 必要，充分；　(2)充要；　(3)收敛，发散.

2. 下题中给出了四个结果，从中选出一个正确的结果.
设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $|x|$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为（　　）.

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$;

B. $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\sin 2x+\frac{1}{4^2}\sin 4x+\frac{1}{6^2}\sin 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\sin 2nx+\cdots\right]$;

C. $\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\cdots\right]$;

D. $\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\frac{1}{6^2}\cos 6x+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\cos 2nx+\cdots\right]$.

分析: 因为 $f(x)$ 是偶函数，有 $b_n=0\ (n=1,2,3,\cdots)$，B 错；$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$，C 和 D 错.

解　A.

3. 判定下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$;　(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}\quad(a>0,s>0)$.

分析: 所给级数均为正项级数.

解 (1) 令 $u_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, $v_n=\frac{1}{n}$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 根据正项级数的比较审敛法的极限形式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

($\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\frac{1}{x}}{1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$)

(2) 令 $u_n=\frac{(n!)^2}{2n^2}=\frac{\left[(n-1)!\right]^2}{2}$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$, 根据级数收敛的必要条件可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$ 发散.

(3) 令 $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$, $v_n=\frac{n}{2^n}$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1$, 根据正项级数的比值审敛法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛; 又因为 $u_n\leqslant v_n$, 根据正项级数的比较审敛法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

(4) 令 $u_n=\frac{1}{\ln^{10}n}$, $v_n=\frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10(\ln x)^9\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^9 x}{x}=\cdots=10\cdot9\cdot\cdots\cdot2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=+\infty$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 根据正项级数的比较审敛法的极限形式可知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$ 发散.

(5) 令 $u_n=\frac{a^n}{n^s}$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}}{\frac{a^n}{n^s}}=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}=a$, 根据正项级数的比值审敛法可知, 当 $a<1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ 收敛, 当 $a>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ 发散.

当 $a=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 为 p 级数，当 $s>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ 收敛，当 $s\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ 发散.

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证明 由收敛级数的性质知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(u_n+v_n)^2}{u_n+v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法的极限形式可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛？请说明理由.

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

因为由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$ 可得，对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在 N，当 $n>N$ 时，$\left|\frac{v_n}{u_n}-1\right|<\frac{1}{2}$，即

$$v_n>\frac{1}{2}u_n>0,\quad v_n<\frac{3}{2}u_n,$$

由正项级数的比较判别法得，正项级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty}v_n$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是正项级数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能发散.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数，满足莱布尼茨定理的条件，收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=1.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

6. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解 (1) 当 $p\leq 0$ 时，$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}\neq 0$，级数发散;

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为 p 级数，$0<p\leqslant 1$，级数发散；$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 为交错级数，满足莱布尼茨定理的条件，收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 条件收敛;

当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为 p 级数，$p>1$，级数收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n+1}}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^{n+1}}$ 是公比为 $\frac{1}{\pi}$ 的等比级数，收敛，由正项级数的比较判别法得，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}\right|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$ 绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\ln e=1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，发散，由正项级数的比较审敛法的极限形式得，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 为交错级数，满足莱布尼茨定理的条件，收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 条件收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)+1]!}{(n+1)^{(n+1)+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

由正项级数的比值审敛法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 绝对收敛.

7. 求下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$; (2) $\lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}\right]$.

解 (1) 法一 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 为正项级数，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n^2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}\right]^{\frac{n^2}{n^2+2n}}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot e^{-1}\cdot e^{2}\cdot 1=\frac{e}{3}<1,$$

由正项级数的比值审敛法得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，所以其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界，其中 $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$. 因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}s_n=0.$$

法二 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 为正项级数，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{3}<1,$$

由正项级数的根值审敛法得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，所以其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界，其中 $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$. 因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}s_n=0.$$

(2) 因为

$$2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{2}{9}}\cdot2^{\frac{3}{27}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

讨论幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，收敛域为 $(-1,1)$，令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则

$$s\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，收敛域为 $(-1,1)$，逐项积分得

$$\int_0^x s_1(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以

$$s_1(x)=\left[\int_0^x s_1(x)dx\right]'=\left[\frac{x}{1-x}\right]'=\frac{1}{(1-x)^2}\quad(-1,1).$$

于是 $s(x)=xs_1(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，因而 $s\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}\right]=\lim_{n\to\infty}2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}=2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}}=2^{s\left(\frac{1}{3}\right)}=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}.$$

8. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+5^n}{n}x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$.

解 (1) 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n+5^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{5}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

(2) 法一　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}\right]^{\frac{2n}{n^2+2n}}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}^2\cdot 1=\mathrm{e},$$

所以幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

法二　因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|x|=\mathrm{e}|x|,$$

由正项级数的根值审敛法，得当 $\mathrm{e}|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n\right|$ 收敛，所以幂级数绝对收敛；当 $\mathrm{e}|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n\right|$ 发散，所以幂级数发散.

因而幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(3) 令 $t=x+1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$.

讨论幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.即 $|t|<1$，或 $|x+1|<1$，所以 $-2<x<0$.

因而原幂级数的收敛区间为 $(-2,0)$.

(4) 令 $t=x^2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}t^n$.

讨论幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}t^n$，因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2},$$

所以幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=2$，收敛区间为 $(-2,2)$，即 $|t|<2$，或 $|x^2|<2$，所以 $|x|<\sqrt{2}$.

因而原幂级数的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

9. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$；　　*(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$；　　*(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解　(1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}x^{[2(n+1)-1]}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot|x|^2=\frac{1}{2}\cdot|x|^2,$$

由正项级数的比值审敛法可知，当$\frac{1}{2}\cdot|x|^2<1$，即$|x|<\sqrt{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}\right|$收敛，所以幂级数绝对收敛；当$\frac{1}{2}\cdot|x|^2>1$，即$|x|>\sqrt{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}\right|$发散，所以幂级数发散. 因而幂级数的收敛半径为$R=\sqrt{2}$，收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$，则$s(0)=\frac{1}{2}$，逐项积分，得

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}\mathrm{d}x\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},$$

所以

$$s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}).$$

*(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}x^{2(n+1)-1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot|x|^2=|x|^2,$$

由正项级数的比值审敛法可知，当$|x|^2<1$，即$|x|<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right|$收敛，所以幂级数绝对收敛；当$|x|^2>1$，即$|x|>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right|$发散，所以幂级数发散. 当$x=\pm1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$是收敛的交错级数，因此幂级数的收敛域为$-1\leqslant x\leqslant1$.

设幂级数的和函数为$s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},$$

逐项求导，得

$$s'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

所以

$$\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

故 $s(x)-s(0)=\arctan x-\arctan 0$，又 $s(0)=0$，因而 $s(x)=\arctan x\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{(n+1)}}{n(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot|x-1|=|x-1|,$$

由正项级数的比值审敛法可知，当 $|x-1|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|n(x-1)^n\right|$ 收敛，所以幂级数绝对收敛；当 $|x-1|>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|n(x-1)^n\right|$ 发散，所以幂级数发散.因而幂级数的收敛域为 $(0,2)$.

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=(x-1)\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$，令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}$，逐项积分，得

$$\int_1^x s_1(x)\mathrm{d}x=\int_1^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_1^x n(x-1)^{n-1}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{2-x},$$

所以 $s_1(x)=\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)'=\dfrac{1}{(2-x)^2}$，因而 $s(x)=(x-1)s_1(x)=\dfrac{x-1}{(2-x)^2}\quad(0<x<2)$.

*(4) 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)[(n+1)+1]}}{\dfrac{1}{n(n+1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1,$$

所以幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$，又当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛，故幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$，则 $xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，逐项求导，得

$$s_1'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

$$s_1''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

积分得 $\int_0^x s_1''(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$，故 $s_1'(x)-s_1'(0)=-\ln(1-x)+\ln(1-0)$，又 $s_1'(0)=0$，所以 $s_1'(x)=-\ln(1-x)$.

再积分得

$$\begin{aligned}\int_0^x s_1'(x)\mathrm{d}x&=\int_0^x-\ln(1-x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^x\ln(1-x)\mathrm{d}x=-x\ln(1-x)\Big|_0^x+\int_0^x x\cdot\frac{-1}{1-x}\mathrm{d}x\\&=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x),\end{aligned}$$

故 $s_1(x)-s_1(0)=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$，又 $s_1(0)=0$，所以

$$s_1(x)=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)=x+(1-x)\ln(1-x),$$

因而，当 $x\in[-1,0)\cup(0,1)$ 时，

$$s(x)=\frac{1}{x}s_1(x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x).$$

当 $x=0$ 时，$s(0)=0$．当 $x=1$ 时，

$$s(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

所以

$$s(x)=\begin{cases}1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1);\\0, & x=0;\\1, & x=1.\end{cases}$$

10. 求下列数项级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$

解　(1) 因为

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty),$$

由幂级数的性质，得

$$x\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n,$$

逐项求导，得

$$(x\mathrm{e}^x)'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1},$$

即

$$(1+x)\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}\ (-\infty<x<+\infty),$$

令 $x=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\mathrm{e}.$$

(2) 因为

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty<x<+\infty),$$

由幂级数的性质，得

$$x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+2},$$

逐项求导，得

$$(x\sin x)'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+2}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+2}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

即

$$\sin x+x\cos x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty<x<+\infty).$$

令 $x=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1).$$

11. 将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(2) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$f(0)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (-1<x<1),$$

得

$$f'(x)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(x^2)^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(x^2)^3+\cdots$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(x^2)^n+\cdots\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$=1+(-1)^1\frac{1}{2}x^2+(-1)^2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+(-1)^3\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots,$$

$$(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

所以

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x 1\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^x(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\mathrm{d}x\right]$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

(2) 令 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$，由

$$f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\quad(-2<x<2)\quad,$$

得

$$f'(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}\quad,$$

即

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}\quad(-2<x<2)\quad.$$

12. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ \mathrm{e}^x, & x\in[0,\pi).\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 由收敛定理得，函数 $f(x)$ 的傅里叶级数，当 $x\neq n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于 $f(x)$；当 $x=(2n+1)\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{0+\mathrm{e}^{\pi}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2};$$

当 $x=2n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，收敛于

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

计算傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^x\Big|_0^{\pi}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos(nx)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos(nx)\\&=\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1+n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1+n\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1+\mathrm{e}^x\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-n^2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1-n^2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1}{1+n^2}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos(-1)^n-1}{1+n^2}\quad.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos(-1)^n-1}{1+n^2}\ (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\mathrm{d}x,$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\sin(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\sin(nx)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sin(nx)\\&=-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x=-n\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=-n\mathrm{e}^x\cos(nx)\Big|_0^{\pi}-n^2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\mathrm{d}x\\&=-n\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)+n-n^2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos(n\pi)-1}{1+n^2}=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+n^2},$$

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+n^2}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n\mathrm{e}^{\pi}(-1)^{n+1}+n}{1+n^2}=\frac{n}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\pi}(-1)^{n+1}+1}{1+n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

于是, $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]\\&=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cdot\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+n^2}\cos(nx)+n\cdot\frac{(-1)^{n+1}\cdot\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+n^2}\sin(nx)\right],\\&\quad(x\neq n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{aligned}$$

13. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant \pi.\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先将函数 $f(x)$ 展开成正弦级数. 对函数 $f(x)$ 作奇延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $(0,h)\cup(h,\pi]$ 上, 收敛于 $f(x)$; 当 $x=0$ 时, 收敛于

$$\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0\,;$$

当 $x=h$ 时, 收敛于

$$\frac{f(h^+)+f(h^-)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

若不计 $x=2n\pi$, $x=2n\pi\pm h\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 延拓后的函数是奇函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^h 1\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}0\cdot\sin(nx)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\bigg|_0^h=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos(nh)}{n}\,,$$

于是, $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)\ =\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(nh)}{n}\sin(nx)\,,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi]\,.$$

再将函数 $f(x)$ 展开成余弦级数. 对函数 $f(x)$ 作偶延拓, 再作周期延拓, 延拓后的函数是周期为 2π 的周期函数. 由收敛定理得, 延拓后的函数的傅里叶级数, 在 $[0,h)\cup(h,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$; 当 $x=h$ 时, 收敛于

$$\frac{f(h^+)+f(h^-)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

若不计 $x=2n\pi\pm h\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 延拓后的函数是偶函数, 计算延拓后的函数的傅里叶系数如下:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^h 1\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}0\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}h\,,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^h 1\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_h^{\pi}0\cdot\cos(nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^h=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(nh)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)\,.$$

于是, $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\ =\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nh)}{n}\cos(nx)\quad x\in[0,h)\cup(h,\pi]\,.$$

第　二　篇

历年考研部分试题及解答

第一部分　向量代数与空间解析几何

一、重点内容提示

“向量代数”主要是向量的表示法与向量的代数运算（加法、减法、数量积、向量积、混合积），关心的问题是向量的大小与方向，而不是线性相关性.

“空间解析几何”主要是空间曲面与空间曲线的方程，重点是平面、直线的方程及常见曲面的方程，考研试题中此方面的题目并不多，但在有关曲面的切平面与曲线的切线以及其他几何应用的问题中，经常要用到向量代数与空间解析几何的基本知识.

历年的试题题型有：① 向量的运算；② 求平面及直线方程；③ 平面、直线间的位置关系；④ 距离公式；⑤ 求旋转面方程；⑥ 综合题.

二、考研部分试题及答案

1.（1995 年数一 3 分）设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则直线 L

A. 平行于 π.　　B. 在 π 上.　　C. 垂直于 π.　　D. 与 π 斜交.

解　直线的方向向量为 $\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 3 & 2\\2 & -1 & -10\end{vmatrix}=-28i+14j-7k=-7(4i-2j+k)$，

而平面的法向量 $\boldsymbol{n}=4i-2j+k\Rightarrow \boldsymbol{l}/\!/\boldsymbol{n}\Rightarrow L\perp\pi$. 所以答案为 C.

2.（1998 年数一 3 分）设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$

A. 相交于一点.　　B. 重合.　　C. 平行但不重合.　　D. 异面.

解　由题意知 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2\\a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$，

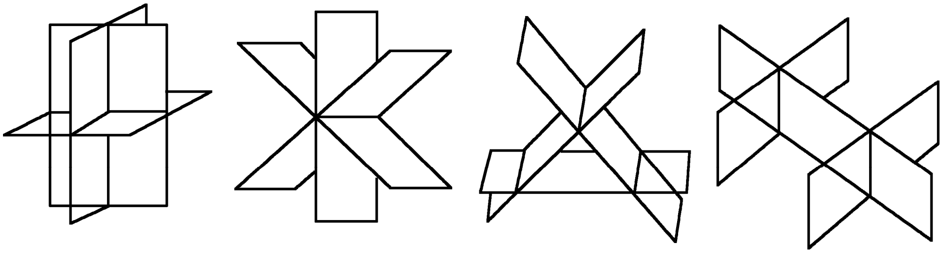
所以 $\dfrac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\dfrac{b_1-b_2}{b_2-b_3}=\dfrac{c_1-c_2}{c_2-c_3}$ 不成立，所以两直线不平行.

又因为 $\begin{vmatrix}a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2\\a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3\\a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1\end{vmatrix}=0$，

所以 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2),(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3),(a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1)$ 共面.

所以两直线相交. 答案为 A.

3.（2002 数一 3 分）设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i(i=1,2,3)$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为（　　）.



A.　　　　　　　　B.　　　　　　　　C.　　　　　　　　D.

解　由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 且小于未知数的个数 3, 故线性方程组有无穷多个解, 因此三个平面不可能没有公共交点, 也不可能仅交于一点, 这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2, 故必有两个平面的法向量线性无关, 即不共线, 因此三平面必交于一线. 故应选 B.

4.（1993 数一、二 3 分）设有线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$.　　　　B. $\dfrac{\pi}{4}$.　　　　C. $\dfrac{\pi}{3}$.　　　　D. $\dfrac{\pi}{2}$.

解　L_1 与 L_2 的方向向量 $t_1=\{1,-2,1\},t_2=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\{-1,-1,2\}$，

$$\cos\theta=\frac{|t_1\cdot t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}.$$

故选 C.

5.（1995 年数一 3 分）设 $(a\times b)\cdot c=2$，则 $\left[(a+b)\times(b+c)\right]\cdot(c+a)=$______.

解　$\left[(a+b)\times(b+c)\right]\cdot(c+a)=(a\times b)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot c+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot a$

$=2(a\times b)\cdot c=4$

6.（1996 年数一 3 分）设一平面经过原点及 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 则平面方程为______.

解　由题意设所求平面方程为 $Ax+By+Cz=0$，由于过 $(6,-3,2)$，所以 $6A-3B+2C=0$，再由平面 $4x-y+2z=8$ 垂直得 $4a-B+2C=0\Rightarrow A=B,C=-\dfrac{3}{2}A$，所以答案为 $2x+2y-3z=0$.

7.（2006 年数一 4 分）点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$____.

解　$d=\dfrac{|3\cdot2+4\cdot1+5\cdot0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$.

8.（1990 数一、二 3 分）过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\y=3t-4\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是_______.

解　$-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$.

9.（1991 数一、二 3 分）已知两直线的方程是 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$, $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是______ .

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 因为 $(1,2,3)$ 在平面 $A+2B+3C+D=0$ 上, 且 $(A,B,C)\perp(1,0,-1),(A,B,C)\perp(2,1,1)$,

所以 $A-C=0\Rightarrow A=C$; $2A+B+C=0\Rightarrow B=-3A\Rightarrow D=2A$,

$Ax-3Ay+Az+2A=0\Rightarrow x-3y+z+2=0$.

10.（1987 数一、二 3 分）与两直线 $\begin{cases}x=1\\y=-1+t,\\z=2+t\end{cases}$ $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为______ .

解 $\boldsymbol{n}=\{0,1,1\}\times\{1,2,1\}=\begin{vmatrix}i & j & k\\0 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\{-1,1,-1\}$, 所求平面方程为 $x-y+z=0$.

11.（1998 年数一 5 分）求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 由 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}x-1=y\\y=1-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$, 过 L 的平面束方程为

$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$

与 $\pi:x-y+2z-1=0$ 垂直的平面方程的条件 $\lambda=-2$, 所求直线 L_0 为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$（$L_0$ 还可以用其他方法求, 读者不妨一试）.

求旋转曲面 S; 把 L_0 表示成 $\begin{cases}x=2y\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x=\sqrt{(2y)^2+\left[\dfrac{1}{2}(1-y)\right]^2}\cos\theta\\y=y\\z=\sqrt{(2y)^2+\left[\dfrac{1}{2}(1-y)\right]^2}\sin\theta\end{cases}$,

消去 θ 得 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

第二部分　多元函数微分学

一、重点内容提示

多元函数微分学包括有若干基本概念及其联系; 多元函数的复合函数求导法; 隐函数求导法及其应用; 全微分的求法; 梯度向量与方向导数的计算方法; 多元函数微分学的几何应用（求空间曲线的切线、法平面与空间曲面的切平面、法线）; 极值判断与最值问题; 等等. 在历年考试中多元函数微分学的内容也是比较重要的. 历年试题的题型大致可归纳为:

1. 多元（主要二元）函数微分学中的若干基本概念及其联系;
2. 多元（主要二元和三元）初等函数的偏导数或全微分;
3. 复合函数求导法：① 求带抽象函数记号的复合函数的一、二阶偏导数或全微分; ② 求隐函数的导数、偏导数或全微分; ③ 变量替换下方程的变形.
4. 求二元或三元函数的梯度或方向导数;
5. 多元函数微分学的几何应用;
6. 多元函数的极值、最值问题.

二、考研部分试题及答案

1.（1997 年数一 3 分）二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0 \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处

A. 连续，偏导数存在.　　　　B. 连续，偏导数不存在.

C. 不连续，偏导数存在.　　　D. 不连续，偏导数不存在.

解　由定义 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，即偏导数存在. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，$k$ 不同极限不同，所以不连续. 答案为 C.

2.（1997 年数一 3 分）考虑二元函数的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续　　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微　　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有

A. ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①　　B. ③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①　　C. ③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①　　D. ③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④

答案　A.

3.（2012 年数一 4 分）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是?

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

答案 B.

解 由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，可知如果 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$,

这样，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

也即极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 存在，可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$,

即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$.

由可微的定义可知, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. 故选 B.

4.（2013 年数一 4 分）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

A. $x-y+z=-2$　　B. $x+y+z=0$　　C. $x-2y+z=-3$　　D. $x-y-z=0$

答案 A.

解 法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x-y\sin(xy)+1,-x\sin(xy)+z,y)$, $\boldsymbol{n}|_{(0,1,-1)}=(1,-1,1)$,

切平面的方程为 $1(x-0)-1(y-1)+1(z+1)=0$, 即 $x-y+z+2=0$.

5.（2005 年数一 4 分）设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内方程

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z),z=z(x,y)$.

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z),z=z(x,y)$.

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z),y=y(x,z)$.

解 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1,F(0,1,1)=1$,

又因为 $F_x(0,1,1)=2\neq 0,F_y(0,1,1)=-1\neq 0,F_z(0,1,1)=0$, 所以答案为 D.

6.（2010 年数一 4 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$,

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

A. x　　B. z　　C. $-x$　　D. $-z$

解 法一，直接法. 方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两端分别对 x,y 求偏导有

$$F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\quad F_1'\frac{1}{x}+F_2'\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}\Rightarrow x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, 故答案为 B.

法二，公式法. 记 $G(x,y,z)=0, G(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G'_x}{G'_z}=\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2\frac{1}{x}}=\frac{yF'_1+zF'}{xF'_2},$$

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1}{F'_2}\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

7.（2008 年数一 4 分）函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

A. i B. $-i$ C. j D. $-j$

解 易求 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$，故答案为 A.

8.（2003 年数一 4 分）已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D. 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解 由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,\Rightarrow f(0,0)=0$；

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=xy+\rho^4+0(\rho^4)$ $((x,y)\to(0,0)\Rightarrow\rho\to0)$;
所以 $f(x,y)$ 的符号主要由 xy 决定，而 xy 在 $(0,0)$ 附近符号不定，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，答案应选 A.

9.（2006 年数一 12 分）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列正确的是

A. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ B. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$

C. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ D. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$

解 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则 (x_0,y_0) 满足

$$\begin{cases}F'_x=f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0 & (1)\\ F'_y=f'_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_y(x_0,y_0)=0 & (2)\end{cases},$$

若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，由式(1)知 $\lambda=0$ 或 $\varphi'_x(x_0,y_0)=0$，当 $\lambda=0$ 时，由式(2)知 $f'_y(x_0,y_0)=0$，当 $\lambda\neq0$ 时，由 $\varphi'_y(x,y)\neq0$ 和式(2)知 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$，故 A 与 B 不对.

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq0$，由式(1)知 $\lambda\neq0$，再由式(2)及 $\varphi'_y(x,y)\neq0$ 知 $f'_y(x_0,y_0)\neq0$，故选 D.

10.（1998 年数一 3 分）设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y), f,\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______ .

解 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)x+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)=f'(xy)+\varphi(x+y)+y\varphi'(x+y)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''(xy)y+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

11.（2007 年数一 4 分）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______ .

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}yx^{y-1}+\dfrac{\partial f}{\partial v}y^x\ln y$.

12.（2009 年数一 4 分）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____ .

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''x+f_{22}''xy+f_2'$.

13.（2005 年数一 4 分）设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\{1,2,3\}}=$______ .

解 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\{1,2,3\}}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

14.（2012 年数一 4 分）$\left.\mathrm{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}$ ________.

解 $\left.\mathrm{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}=\left.\left\{y,x-\dfrac{z}{y^2},\dfrac{1}{y}\right\}\right|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$.

15.（2000 年数一 5 分）设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数. g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2'\dfrac{1}{y}+g'\dfrac{-y}{x^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_{11}''x+f_{12}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]y+f_1'+\left[f_{21}''x+f_{22}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]\frac{1}{y}$$

$$+f_2'\left(-\frac{1}{y^2}\right)+g''\frac{1}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g'\frac{-1}{x^2}$$

$$=f_{11}''xy-f_{22}''\frac{x}{y^3}+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'.$$

16.（2001 年数一 6 分）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$,

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f\left[x,f(x,x)\right]$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解 $\varphi'(x)=f_1'\left[x,f(x,x)\right]+f_2'\left[x,f(x,x)\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x)$

$$= f_1'[x, f(x,x)] + f_2'[x, f(x,x)][f_1'(x,x) + f_2'(x,x)],$$

$$\varphi'(1) = f_1'(1,1) + f_2'(1,1)[f_1'(1,1) + f_2'(1,1)] = 2 + 3(2+3) = 17,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1} = 3\varphi^2(x)\varphi'(x)\Big|_{x=1} = 3\times 17 = 51.$$

17.（2010 年数一 4 分）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z = f(\mathrm{e}^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x} z$，求 $f(u)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\mathrm{e}^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y + f'(u)\mathrm{e}^x \sin y$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\mathrm{e}^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y - f'(u)\mathrm{e}^x \sin y$,

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)\mathrm{e}^{2x}$，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x} z$ 得 $f''(u) - f(u) = 0 \Rightarrow f(u) = c_1\mathrm{e}^u + c_2\mathrm{e}^{-u}$.

18.（1996 年数一 6 分）设变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a，其中 $z = z(x,y)$ 有二阶连续的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \tag{2}$$

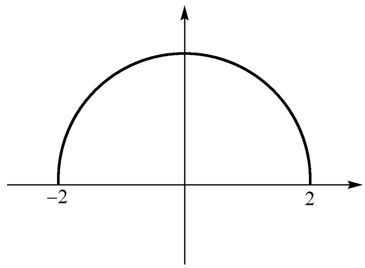
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \tag{3}$$

式(1)、(2)、(3)代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6 + a - a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

$6 + a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 3, a = -2$（舍去）所以当 $a = 3$ 时结论成立.

19.（2007 年数一 11 分）求函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4, y \geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.



解 (1) 求 D 内的驻点及相应的函数值，易求驻点为 $M_1(\sqrt{2},1), M_2(-\sqrt{2},1)$ $f(\pm\sqrt{2},1) = 2$.

(2) 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值与最小值.

边界由两部分组成:

$L_1: y = 0, -2 \leqslant x \leqslant 2$，在 L_1 上 $f(x,y) = x^2$，最大值 $=4$，最小值 $=0$.

$L_2: y^2 = 4 - x^2 (-2 \leqslant x \leqslant 2)$，在 L_2 上 $h(x) = f(x,y) = 8 - 5x^2 + x^4$，驻点 $x = 0, x^2 = \frac{5}{2}$，

$h(0)=8, h\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)=\dfrac{7}{4}\ h(\pm 2)=4$,

边界最大值 8，最小值 0，所以 $\max f(x)=8, \min f(x)=0$.

20.（2008 年数一 11 分）已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解 设所求点为 (x,y,z)，即求 $f=|z|$ 等价 $f=z^2$ 在条件 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 下的最值点.

令 $F=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$，解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2\lambda x+\mu=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-4\lambda z+3\mu=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2\lambda y+\mu=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2z^2=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}=x+y+3z-5=0 \end{cases} \Rightarrow (1,1,1),(-5,-5,5),$$

由题意知 $(1,1,1),(-5,-5,5)$ 分别是最近和最远的点.

21.（2004 年数一 12 分）设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别求导得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases}$ 代入原方程有

$$9y^2-18y^2+10y^2-2y^2-y^2+18=0 \Rightarrow y=\pm 3.$$

得驻点 $(9,3),(-9,-3)$。函数值为 3, –3，再求驻点的二阶导数.

对 $2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 两端分别对 x,y 求导知，在驻点(9,3)处，$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}, B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}, C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$;

$AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0, A>0$，故 $(9,3)$ 是极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

同理点 $(-9,-3)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

22.（2009 年数一 9 分）求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解 先求驻点. 由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x(2+y^2)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$得唯一驻点$(x,y)=(0,\mathrm{e}^{-1})$,

再由$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2+y^2),B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy,C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2+\dfrac{1}{y}$;

可知在$(x,y)=(0,\mathrm{e}^{-1})$处$A>0,B=0,C>0\Rightarrow AC-B^2>0$,

故$f(x,y)$在$(x,y)=(0,\mathrm{e}^{-1})$取极小值$f(0,\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$.

23.（2012 年数一 10 分）求$f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$的极值.

解 先求函数的驻点. 令

$$\begin{cases}f_x'(x,y)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ f_y'(x,y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases},$$

解得驻点为$(1,0),(-1,0)$. 又

$$f_{xx}''=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f_{xy}''=-y(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f_{yy}''=-x(1-y^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

对点$(1,0)$，有$A_1=f_{xx}''(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B_1=f_{xy}''(1,0)=0,C_1=f_{yy}''(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,

所以$A_1C_1-B_1^{\,2}>0,A_1<0$，故$f(x,y)$在点$(1,0)$处取得极大值$f(1,0)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

对点$(-1,0)$，有$A_2=f_{xx}''(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B_2=f_{xy}''(-1,0)=0,C_2=f_{yy}''(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,

所以$A_2C_2-B_2^{\,2}>0,A_2>0$，故$f(x,y)$在点$(-1,0)$处取得极小值$f(-1,0)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

24.（2012 年数一 10 分）求函数$f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$的极值.

解：先求驻点. 令

$$\begin{cases}f_x=\left(x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0\\ f_y=\left(1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}.$$

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases}f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f_{xy}=\left(x^2+1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f_{yy}=\left(2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}\end{cases}$$

在点$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$处，$A=f_{xx}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},B=f_{xy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},C=f_{yy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$,

因为$A<0,AC-B^2<0$，所以$\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$不是极值点.

类似地，在点$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$处，$A=f_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},B=f_{xy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},C=f_{yy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$,

因为$A>0,AC-B^2=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}>0$，所以$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$是极小值点，极小值为

$f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

第三部分　多元函数积分学

一、重点内容提示

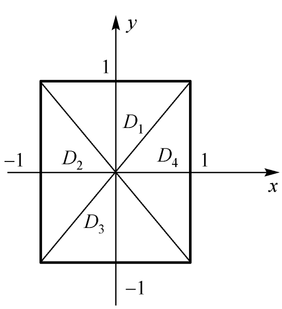
多元函数积分学包括各类积分的概念、计算与应用; 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式及其应用; 平面曲线积分与路径无关及二元函数求积等. 在历年数一考试中, 多元函数积分学占有重要地位, 也是与数三、数二的主要区别. 题型大体归为如下几种:

1. 重积分的概念与积分值的比较;
2. 利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性化简多元函数的积分;
3. 交换积分次序与累次积分的转换;
4. 选用适当方法计算二重积分;
5. 选用适当方法计算三重积分;
6. 求曲线积分与格林公式、斯托克斯公式;
7. 求曲面积分与高斯公式;
8. 计算向量场的散度与旋度;
9. 曲线积分与路径无关及二元函数全微分求积;
10. 多元函数积分学应用及综合题.

二、考研部分试题及答案

1.（2009 年数一 4 分）如图, 正方形$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, 问 $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$______.

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4



解　由对称性 $I_2=I_4=0$, 由 $I_1>0,I_2<0$ 知答案为 A.

2.（2005 年数三 4 分）$I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 则

A. $I_3 > I_2 > I_1$　　B. $I_1 > I_2 > I_3$　　C. $I_2 > I_1 > I_3$　　D. $I_3 > I_1 > I_2$

解　在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有

$$(x^2+y^2)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \cos(x^2+y^2)^2 \geqslant \cos x^2+y^2 \geqslant \cos\sqrt{x^2+y^2},$$

并且不全相等, 所以答案为 A.

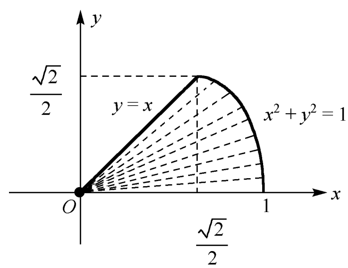
3.（2006 年数一 4 分）设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

解　$D: 0\leqslant y\leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$, 如图所示.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$



故答案为 C.

4.（2007 年数一 4 分）设曲线 $L: f(x,y)=1$ （$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数）, 且过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N, Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 如图所示. 则下列积分小于零的是

A. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$

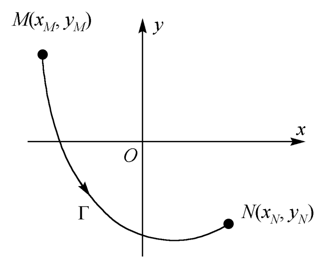
C. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$　　D. $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

解　A. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x = \int_\Gamma 1\mathrm{d}x = x_N - x_M > 0$,

B. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y = \int_\Gamma 1\mathrm{d}y = y_N - y_M < 0$,

C. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\Gamma 1\mathrm{d}s = \Gamma$的长度$>0$,

D. $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y = 0.$



故答案为 B.

5.（2000 年数一 3 分）设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$, S_1 是 S 在第一卦限中的部分, 则有

A. $\iint\limits_S x\mathrm{d}s = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}s$　　B. $\iint\limits_S y\mathrm{d}s = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}s$

C. $\iint\limits_S z\mathrm{d}s = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}s$　　D. $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}s = 4\iint\limits_{S_1} xxyz\mathrm{d}s$

解　由对称性有 $\iint\limits_S z\mathrm{d}s = 4\iint\limits_{S_1} z\mathrm{d}s$, 所以答案为 C.

6.（1988 年数一 3 分）设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(z\geqslant 0)$, 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ $(z\geqslant 0, y\geqslant 0, x\geqslant 0)$, 则正确的是

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$

C. $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$　　D. $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$

答案　C.

7.（2012 年数一 4 分）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=$________.

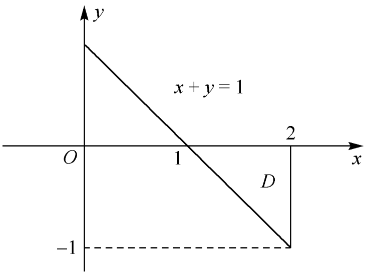
解　由曲面积分的计算公式可知 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}S=\iint\limits_{D} y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$.

故原式 $=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} y^2\mathrm{d}x=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

8.（2001 年数一 3 分）交换二次积分次序: $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

解　如图所示.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x&=-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x\\&=-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$



9.（2009 年数一 4 分）设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$_____.

解　$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi=\dfrac{4}{15}\pi$.

10.（1998 年数一 3 分）设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长为 a，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$_____.

解　$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a$.

11.（2004 年数一 4 分）设 L 为正向圆周在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为______.

解　由格林公式易求 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}\pi$.

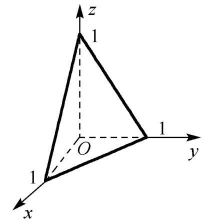
12.（10 年数一 4 分）已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\left(x\in[-1,1]\right)$，起点为 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$______.

解　$I=\int_{L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+\int_{L_2} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\left[x(1+x)+x^2\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left[x(1-x)x^2(-1)\right]\mathrm{d}x=0$.

也可用格林公式求解.

13.（2010 年数一 4 分）设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，如图所示，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}s=$____ .

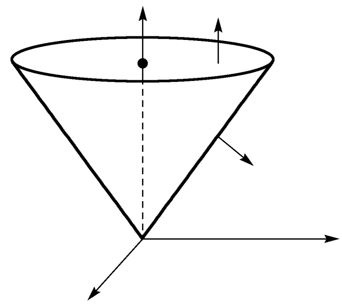
解 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}s=\oiint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}s=\dfrac{8}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.



14.（2005 年数一 4 分）设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____ .

解 由高斯公式有 $I=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}v=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=(2-\sqrt{2})\pi R^3$.

15.（2006 年数一 4 分）设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则
$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____ .



解 $\Sigma_1:z=1$ $(x^2+y^2\leqslant 1)$ 取上侧，如图所示.

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+0+0=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6\mathrm{d}v=2\pi .$$

所以 $I=2\pi-0=2\pi$.

16.（1995 年数一 5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y .$$

解 法 1：交换积分次序有

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$$

即 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}x=I$，

$$2I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=A^2,$$

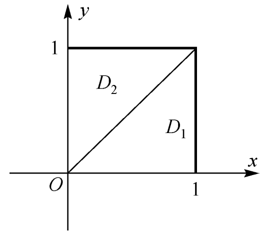
$$I=\frac{1}{2}A^2 .$$

法 2：分步积分法

$$I=\int_0^1\left[f(x)\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]^2\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}A^2 .$$

17.（2002 年数一 7 分）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，如图所示.



解 $\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant y\\ y^2, & x\geqslant y\end{cases}\ (x,y)\in D$，$D=D_1\cup D_2$，

$$I=\iint\limits_{D_1}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy\ \ (D\text{关于}y=x\text{对称})$$

$$=2\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy\overset{\text{选择积分次序}}{=}2\int_0^1xe^{x^2}dx=e-1.$$

18.（2005 年数一 11 分）设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，$\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$.

解 在 D 上: $xy\left[1+x^2+y^2\right]=\begin{cases}xy & x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 2xy & 1\leqslant x^2+y^2<\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$

D_1: $x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$ ；D_2: $1\leqslant x^2+y^2<\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0$，因为 $D=D_1\cup D_2$，所以

$$I=\iint\limits_{D_1}xydxdy+\iint\limits_{D_2}2xydxdy=2\iint\limits_{D}xydxdy-\iint\limits_{D_1}xydxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2^{\frac{1}{4}}}r^2\cos\theta\sin\theta rdr-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta rdr=\frac{3}{8}.$$

19.（2006 年数一 10 分）设区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\right\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}$.

解 由对称性 $\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，

$$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

20.（1997 年数一 5 分）计算 $I=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2x\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

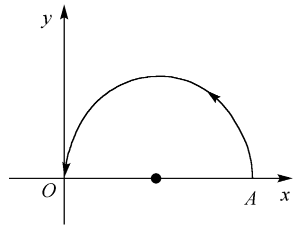
解 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，

$$\Omega:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 4,\frac{1}{2}r^2\leqslant z\leqslant 8,$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4dr\int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2rdz=\frac{1024}{3}\pi.$$

21.（1999 年数一 5 分）求 $I=\int_L\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解 添加辅助线 $L_1:\overrightarrow{OA}:y=0\left(x\in[0,2a]\right)$，如图所示.



$$\int_{L_1}Pdx+Qdy=\int_0^{2a}-bxdx=-2a^2b,$$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{L_1}Pdx+Qdy=\frac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b.$$

22.（2003 年数一 10 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^2$.

证明 (1) 左边曲线积分 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$,

右边曲线积分 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{-\sin x}+e^{\sin x})dx$,

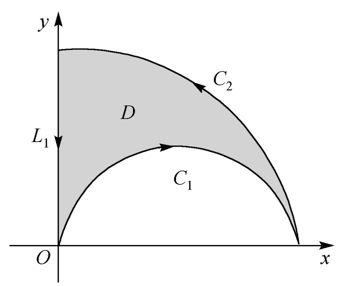
所以(1)式成立.

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\geqslant\pi\int_0^{\pi}2dx=2\pi^2$.

23.（2012 年数一 10 分）已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

解 设圆 $x^2+y^2=2x$ 为圆 C_1，圆 $x^2+y^2=4$ 为圆 C_2，补线利用格林公式即可. 设所补直线 L_1 为 $x=0(0\leqslant y\leqslant 2)$，并设 L 及 L_1 所围的平面区域为 D，如图所示.

用格林公式计算得



$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{L+L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy-\int_{L_1}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy\\&=\iint_D(3x^2+1-3x^2)dxdy-\int_2^0-2ydy\\&=S_D-4=\frac{\pi}{2}-4.\end{aligned}$$

24.（2003 年数一 10 分）计算曲线积分 $\oint_C(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中 C 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$，从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的.

解 法 1 设 $x=\cos t,y=\sin t,z=2-\cos t+\sin t$，由 C 的方向知，C 在 xOy 平面上的投影曲线相应地也是顺时针的，于是 t 从 2π 到 0 代入积分知结果为 -2π.

法 2 用斯托克斯公式来计算. 设 S 为平面 $x-y+z=2$ 上 C 所围成部分. 由 C 的定向，按右手规则 S 取下侧,

$$原积分=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-x & x-z & x-y \end{vmatrix} = \iint_S 2dxdy = -2\iint_{D_{xy}} dxdy = -2\pi .$$

其中 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$.

25.（2001 年数一 7 分）计算 $I=\oint_L (y^2-x^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针.

解　设 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分，由 L 的定向，按右手法则 S 取上侧，S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix} ds$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)ds = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (6+x-y)ds = -2\iint_{D_{xy}} (6+x-y)dxdy$$

$$=-12\iint_D dxdy = -24 .$$

注意 $\iint_D (x-y)dxdy = 0$.

26.（1998 年数一 7 分）求 $I=\iint_\Sigma \dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy-2y(z+a)dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中曲面 Σ 为 $z=-\sqrt{a-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于 0 的常数.

解　$I=\dfrac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz+(z+a)^2 dxdy-2y(z+a)dxdy$,

添加 $\Sigma_1: z=0$ 下侧，则

$$I=\frac{1}{a}\left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)axdydz+(z+a)^2dxdy-2y(z+a)dxdy ,$$

$$I=\frac{1}{a}\left\{\iiint_\Omega -adv-\left[-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} a^2dxdy\right]\right\}=\frac{\pi a^3}{3}.$$

27.（2000 年数一 7 分）设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oint\!\!\!\oint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0 ,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$.

解　由高斯公式有 $\iiint_\Omega \left[xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}\right]dV=0$,

由 Ω 的任意性知 $xf'(x)+(1-x)f(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$，即 $f'(x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)f(x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}(x>0)$，

解微分方程得 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+c)$，由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 得 $c=-1$，

验证 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)=1$，所以 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)$.

28.（2004 年数一 12 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

解 添加辅助面 $\Sigma_1:z=0,(x^2+y^2\leqslant1)$ 取下侧.

记 $J=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(r^2+z)=12\pi\int_0^1\left[r^3(1-r^2)+\frac{1}{2}r(1-r^2)^2\right]\mathrm{d}r=2\pi,$$

$$J_1=\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_1}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$$

所以 $I=J-J_1=2\pi-3\pi=-\pi$.

29.（2009 年数一 10 分）计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解 作以原点为心，$\varepsilon>0$ 为半径的小球面 Σ_ε，取内侧，ε 充分小使 Σ_ε 位于 Σ 所围成的椭球内，记 Σ 与 Σ_ε 所围成的区域为 Ω_ε，由高斯公式得

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$0=\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=-\oiint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}v=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

30.（2002 年数一 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y.$$

(1) 证明：曲线积分 I 与路径无关；(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

解 (1) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分 I 与路径无关.

(2) 取 $L: xy=ab=cd=k \Rightarrow y=\frac{k}{x}$，

$$I=\int_a^c \frac{x}{k}\left[1+\frac{k^2}{x^2}f(k)\right]\mathrm{d}x+\frac{x^3}{k^2}\left[\frac{k^2}{x^2}f(k)-1\right]\left(-\frac{k}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^c\left(\frac{x}{k}+\frac{k}{x}f(k)-\frac{k}{x}f(k)+\frac{x}{k}\right)\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{2x}{k}\mathrm{d}x$$

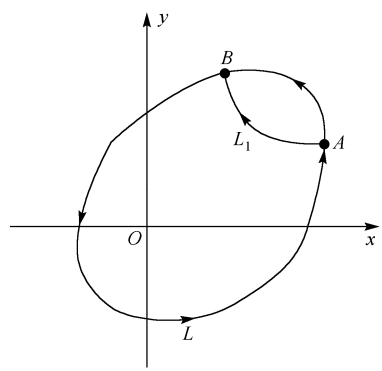
$$=\left.\frac{x^2}{k}\right|_a^c=\frac{c^2-a^2}{k}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

31.（2005 年数一 12 分）设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

解 (1) 证明 在 $x>0$ 内任取两点 A,B，以 A 为起点，B 为终点任作两条分段光滑曲线 L_1,L_2，记 $P=\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4},Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，只要证明 $\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，以 B 为起点作另一分段光滑曲线 L 绕过原点与 A 连接，如图所示.



由题意有

$$\int_{L\cup L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L\cup L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\int_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \text{ 在右半平面与路径无关}$$

$\Rightarrow$ 对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$.

(2) $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\ ((x,y)\in\pi_{右})$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y^5-4x^2y}{(2x^2+y^4)^2},\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2},$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow \varphi'(y)+2y=0$ 和 $\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5$，

由 $\varphi'(y)=-2y$，得 $\varphi(y)=-y^2+c$，代入第二式得

$$\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=-2y^5+4y^5-4cy^3=2y^5,$$

因此 $c=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$.

32.（2013 年数一 10 分）设直线 L 过 $A(1,0,0)$和 $B(0,1,1)$两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω. (1) 求曲面 Σ 的方程; (2) 求 Ω 的重心坐标.

解 (1) $\overline{AB}=\{-1,1,1\}$,

$$L:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},$$

$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$, 对应于$L$上的点$M_0(x_0,y_0,z)$, 则$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,

由$\begin{cases}x_0=1-z\\ y_0=z\end{cases}$得$\Sigma$: $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$, 即Σ: $x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

(2) 显然$\overline{x}=0,\overline{y}=0$.

$$\overline{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{2z^2-2z+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)=\frac{10}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z=\iint\limits_{2z^2-2z+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z=\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{14}{3}.$$

所以$\overline{z}=\frac{7}{5}$, 所以重心坐标为$\left(0,0,\frac{7}{5}\right)$.

第四部分　无 穷 级 数

一、重点内容提示

无穷级数部分包括若干基本概念，判别级数的敛散性（包括条件收敛与绝对收敛）的各种方法，幂级数的收敛性与和函数的性质，幂级数收敛域的求法，求幂级数的和函数与求函数的幂级数展开式的方法，还有傅里叶级数和它的函数等. 历年试题大致可归纳为如下几类:

1. 级数收敛性的判别;
2. 幂级数收敛性的判别;
3. 求幂级数的收敛域与和函数;
4. 数值级数求和;
5. 求函数的幂级数展开式;
6. 傅里叶级数.

若级数分为数值级数、幂级数与傅里叶级数，则幂级数部分考得最多.

二、考研部分试题及答案

1.（1998 年数一 5 分）设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛? 并说明理由.

解　因为$\{a_n\}$单调下降有下界 0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0$存在. 若$a=0$，由莱布尼兹法则，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛矛盾，于是$a>0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a+1}<1$，所以原级数收敛.

2.（2003 年数一 3 分）设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数为

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解　易知答案为 D.

3.（2002 年数一 3 分）设$u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

A. 发散　　B. 绝对收敛

C. 条件收敛　　　　D. 收敛性根据所给条件不能判断

解　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$ 且 $\exists N, n>N, \dfrac{1}{u_n}>0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 为交错级数，但是 $\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 不能保证单调.

考察部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\dfrac{1}{u_k}+\dfrac{1}{u_{k+1}}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{u_k}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{u_{k+1}}$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{u_k}+\sum_{l=2}^{n+1}(-1)^l\frac{1}{u_l}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}\to\frac{1}{u_1}(n\to\infty),$$

所以原级数收敛.

再考察取绝对值后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$，注意 $\dfrac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{n}{u_n}+\dfrac{n+1}{u_{n+1}}\dfrac{n}{n+1}\to 2$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 发散，故答案为 C.

4.（2004 年数一 4 分）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

B. 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2a_n=0$.

D. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=\lambda$.

解　在 B 中由 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=\lambda\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lambda$，由比较法极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

答案　应选 B. 举例说明 A, C, D 不对:

对于 A，$a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$；对于 C，$a_n=\dfrac{1}{n^{3/2}}$；对于 D，$a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

5.（2006 年数一 4 分）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

解 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，由级数收敛性质知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛，所以选 D.

6.（2009 年数一 4 分）设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则

A. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛

B. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散

C. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2{b_n}^2$收敛

D. 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2{b_n}^2$发散

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow\{a_n\}$有界，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0\Rightarrow\{|b_n|\}$有界，

所以$0\leqslant a_n^2b_n^2\leqslant M|b_n|$比较法$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛，故 C 对.

对 A, B.D 下面举反例说明原因:

对 A，$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}},b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 对 B，$a_n=\dfrac{1}{n},b_n=\dfrac{1}{n}$；对 D，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}},b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

7.（2009 年数一 4 分）设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为______.

解 令$t=x-1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}=t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}=t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'$，逐项求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$的收敛半径为 3，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'$的收敛半径也为 3，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}=t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'$的收敛半径为 3，收敛区间为$(-3,3)$，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为$-3<x-1<3\Rightarrow(-2,4)$.

8.（2008 年数一 4 分）已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为__________.

解 因为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$在$t=2$收敛，所以$R\geqslant2$. 又因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=-4$发散，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$在$t=-2$发散，所以$R\leqslant2$，于是$R=2$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$的收敛区间是$(-2,2)$，收敛域为$(-2,2]$，由$-2<t=x-3\leqslant2\Rightarrow1<x\leqslant5\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域是$(1,5]$.

9.（1995 年数一 3 分）幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$的收敛半径$R=$____.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{3\left[1+\left(\dfrac{-2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{3}|x|^2$,

于是当$\dfrac{1}{3}|x|^2<1$时，即$|x|<\sqrt{3}$时幂级数收敛，当$|x|>3$时幂级数发散，所以幂级数的收敛半径$R=\sqrt{3}$.

10.（2003 年数一 4 分）设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad(\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则$a_2=$______ .

解　这是傅里叶系数的问题. 已知$f(x)=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$是以$2\pi$为周期的偶函数,

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x^2 d(\sin 2x)=1.$$

11.（1999 年数一 3 分）设$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 2-2x & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$,

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,-\infty<x<+\infty,$$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$，则$S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$等于

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

解　$S(x)$可视为$f(x)$作偶延拓后再作周期为 2 的周期延拓后的函数的傅里叶级数的和，由于$S(x)$以 2 为周期，又是偶函数，所以

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{5}{2}+2\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right),$$

由收敛定理知

$$\begin{aligned}S\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}+0\right)+f\left(\frac{1}{2}-0\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}(2-2x)+\lim_{x\to\frac{1}{2}+0}x\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

因此$S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$，故选 C.

12.（2013 年数一 4 分）设$f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$,

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)$等于

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

答案　C.

解 根据题意，将函数在 $[-1,1]$ 展开成傅里叶级数（只含有正弦，不含余弦），因此将函数进行奇延拓:

$$f(x)=\begin{cases}\left|x-\dfrac{1}{2}\right|, x\in(0,1)\\ -\left|x+\dfrac{1}{2}\right|, x\in(-1,0)\end{cases},$$

它的傅里叶级数为 $S(x)$，它是以 2 为周期的，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时，$S(x)=f(x), S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}.$

13.（2000 年数一 6 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3\left[1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=\dfrac{1}{3}$,

于是收敛半径 $R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x=3$ 时是正向级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$，由 $\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$,

即 $x=3$ 时原级数发散.

当 $x=-3$ 时是变号级数，用分解法来研究其敛散性:

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\frac{(-1)^n\left[3^n+(-2)^n-(-2)^n\right]}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}}{\dfrac{2^n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$ 收敛. 即 $x=-3$ 时幂级数收敛.

14.（2002 年数一 7 分）(1) 验证 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$；

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解 (1) 这是缺项的幂级数，令 $t=x^3$，则

$$\text{原级数}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(3n)!},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(3(n+1))!}}{\dfrac{1}{(3n)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow x\in(-\infty,+\infty)$ 时原级数收敛.

在收敛区域内对幂级数可以逐项求导任意次. 这里要求求导两次:

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},x\in(-\infty,+\infty),$$

$$y''+y'+y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

由级数的线性性质

$$y''+y'+y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right]=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots=\mathrm{e}^x.$$

(2) $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，相应齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=A\mathrm{e}^x$，代入 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x\Rightarrow A=\frac{1}{3}$，

所以 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=1,y'(0)=1\Rightarrow C_1=\frac{2}{3},C_2=0$，因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.

15.（2005 年数一 12 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解 易求 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

下面求和函数:

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}\quad(|x|<1),$$

$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},$$

$$f_2'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},f_2''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{2}{1+x^2}\quad(|x|<1).$$

由 $f_2'(0)=0,f_2(0)=0$ 积分两次得

$$f_2'(x)=\int_0^x f_2''(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

$$f_2(x)=\int_0^x f_2'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\quad(|x|<1),$$

故 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2)\quad(|x|<1)$.

16.（2007 年数一 10 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$，

(1) 证明 $a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,3,\cdots$；(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

解 (1) $y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

$$y''-2xy'-4y=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_n x^n$$

$$=2a_2-4a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n\right]x^n=0,$$

由 $y(0)=a_0=0 \Rightarrow a_2=0,(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0$，$(n=1,2,3,\cdots)$，

$$\Rightarrow a_0=0, a_2=0, a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 由 $a_2=0$ 及 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$，$a_2=a_4=a_6=\cdots a_{2n}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots)$，

由初值 $y'(0)=a_1=1$ 及 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n \ (n=1,2,3,\cdots)$，

$\Rightarrow a_3=1, a_5=\dfrac{2}{4}a_3=\dfrac{1}{2}, a_7=\dfrac{1}{3}a_5=\dfrac{1}{3!}, a_9=\dfrac{1}{4!}$，

归纳得 $a_{2n+1}=\dfrac{1}{n!} \Rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n+1}=x\mathrm{e}^{x^2}$.

17.（2010 年数一 10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}=xs_1(x), s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$，

$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\frac{1}{1+x^2} \qquad (|x|<1),$$

又 $s_1(0)=0$，于是

$$s_1(x)=\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan x,$$

因此 $s(x)=x\arctan x$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\arctan x \quad x\in[-1,1]$.

18.（1996 年数一 7 分）求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

解 设 $A=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n\left(n^2-1\right)}=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}(n-1)}-\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}\overset{记}{=}A_1-A_2$，

由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1<x\leqslant 1)$，

于是 $A_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2$，

$$A_2=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n n}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\ln 2-\frac{5}{8},$$

因此 $A=A_1-A_2=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

19.（2001 年数一 8 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},|x|<1$，

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan x=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1],x\neq 0$$

上式右端当 $x=0$ 时取值为 1，于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1],$$

上式中令 $x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

20.（2003 年数一 12 分）求函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 $f'(x)=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

由 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，两边积分得

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 连续，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，

所以 $f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

21.（2006 年数一 12 分）将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解 $$\frac{1}{2+x-x^2}=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\quad(|x|<1),$$
$$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\qquad(|x|<1).$$

22.（2008 年数一 11 分）将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 可视为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，$f(x)=1-x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2-\frac{2}{3}\pi^2$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x$

$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2 d(\sin nx)=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\cos nx)=-\frac{4(-1)^n}{n^2}$.

$b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$ 满足展开定理的条件，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx(x\in[-\pi,\pi]),$$

令 $x=0$ 得 $1=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

23.（1995 年数一 6 分）将函数 $f(x)=x-1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期为 4 的周期延拓，于是得 $f(x)$ 的傅里叶系数

$b_n=0$,

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_0^{2}(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{2}(x-1)d\left(\sin\frac{n\pi}{2}x\right)=\frac{2}{n\pi}\int_0^{2}\sin\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]$

$=\begin{cases}\dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, n=2k-1\\ 0, \qquad n=2k\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots,$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0,$$

由于 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 分段单调连续且 $f(-1)=f(1)$,

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{2}\pi x, x\in[0,2].$$

24.（2012 年数一 10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot x^{2n+2}}{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot x^{2n}}\right|=x^2,$

$|x|<1$，级数收敛; $|x|>1$，级数发散. 所以 $R=1$.

易知当 $x=1$及$x=-1$时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 发散，可知 $x\in(-1,1)$为幂级数的收敛域.

下面再计算幂级数的和函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{2n+1},$$

其中 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left\{\int_0^x\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\right]\mathrm{d}t\right\}'$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t\right\}'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{2n+1}$ 则 $xS_1(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

根据逐项求导定理可知

$[xS_1(x)]'=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$，故 $xS_1(x)=2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，故当 $x\neq0$ 时，有

$S_1(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，而当 $x=0$ 时，有 $S_1(0)=2$.

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & -1<x<1或0<x<1\\ 3 & ,x=0\end{cases}.$

25.（2013 年数一 10 分）设数列$\{a_n\}$满足条件: $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\ (n\geqslant2)$. $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数.

(1) 证明 $S''(x)-S(x)=0$;

(2) 求 $S(x)$的表达式.

(1) **证明** 由题意得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ ,$$

$\because a_n=(n+1)(n+2)a_{n+2}(n=0,1,2,\cdots)$，$\therefore S''(x)=S(x)$，即 $S''(x)-S(x)=0$.

(2) **解**　$S''(x)-S(x)=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为 $\lambda^2-1=0$, 从而 $\lambda=\pm 1$，于是 $s(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x$，由 $S(0)=a_0=3,S'(0)=a_1=1$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=3\\-C_1+C_2=1\end{cases}\Rightarrow C_1=1,C_2=2,$$

所以 $S(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^x$.

第　三　篇

《高等数学（下册）》期末考试

试卷选编及参考答案

高等数学（下）期末考试试卷（一）

试　题

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}=$________________.

2. 若 $u=\mathrm{e}^{xy}$，则 $\mathrm{d}u=$________________.

3. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当 p________时，级数收敛.

4. 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__________.

5. 改换积分次序再计算二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\sin y}{1-y}\mathrm{d}y=$____________________.

6. 将 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 转化为极坐标形式下的二次积分为____________________.

7. 曲面 $x^2+3y^2+z^2=11$，在点 $(2,1,2)$ 的切平面方程为________________.

8. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为__________.

二、计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. 设 $\begin{cases}x+2y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

2. 求曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\\z=4\sin\dfrac{t}{2}\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切平面与法线方程.

3. 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v,u=xy,v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点(–3, 2, 5)的直线的方程.

三、计算重积分（每小题 6 分，共 12 分）

1. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

2. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

四、计算曲线积分与曲面积分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 计算曲线积分 $\oint_L (4x-y+2)\mathrm{d}x+(6y+3x-5)\mathrm{d}y$，其中 L 是三顶点分别为 $(0,0)$，$(2,0)$，$(2,2)$ 的三角形正向边界.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

五、求解下列级数问题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

参 考 答 案

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 4

2. $y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$

3. $p>1$

4. 0

5. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\dfrac{\sin y}{1-y}\mathrm{d}x=1-\cos 1$

6. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

7. $2(x-2)+3(y-1)+2(z-2)=0$

8. $y^2+z^2=5x$

二、计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. 两端关于 z 求导数得

$$\begin{cases}x_z+2y_z+1=0\\ xx_z+yy_z+z=0\end{cases},\qquad x_z=\frac{y-2z}{2x-y},\ y_z=\frac{z-x}{2x-y}.$$

2. $$\begin{cases}x_t=1-\cos t\\ y_t=\sin t\\ z_t=2\cos\dfrac{t}{2}\end{cases}$$

故在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为 $\boldsymbol{T}=(1,1,\sqrt{2})$，法平面方程为 $\left(x-\dfrac{\pi}{2}+1\right)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0$.

3. $z_x=z_u u_x+z_v v_x=\mathrm{e}^u\sin v.y+\mathrm{e}^u\cos v=\mathrm{e}^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y))$.

4. $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=-(4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，所以直线方程为 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$

三、计算重积分（每小题 6 分，共 12 分）

1. 解

$$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2}=5\frac{5}{8}.$$

2. 解

柱面法 $\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)\mathrm{d}\rho=\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2$$
$$=\frac{64\pi}{3}.$$

截面法 $\displaystyle\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^4 z\mathrm{d}z\iint_{Dz}1\mathrm{d}\sigma=\int_0^4 z\pi z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}\left[z^3\right]_0^4=\frac{64\pi}{3}.$

四、计算曲线积分与曲面积分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 解 令 $P=4x-y+2$，$Q=6y+3x-5$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3$，

由格林公式有 $\displaystyle\oint_L(4x-y+2)\mathrm{d}x+(6y+3x-5)\mathrm{d}y=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8.$

2. 解

$\Sigma: z=1-x-y$，$\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}=\sqrt{3}$，$D_{xy}$ 为 Σ 在 xOy 面上的投影区域，即由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域. 因此

$$\iint_\Sigma(2x+3y+z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}(1+x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1+x+2y)\mathrm{d}y,$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1(2-2x)\mathrm{d}x=\sqrt{3}.$$

五、求解下列级数问题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 解

(1) 利用比值判别法

$\because\ \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\dfrac{1}{4}<1$，

根据比值审敛法，级数收敛.

(2) 级数为交错级数

令 $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $u_n > u_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，根据莱布尼兹定理，级数收敛.

2. 解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$，所以 $R = 1$,

当 $x = \pm 1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\pm 1)^{n-1} n \neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n$ 发散,

所以级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = s(x)$, $x \in (-1,1)$.

因为 $(x^n)' = nx^{n-1}$，由逐项积分公式有

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x},$$

将等式同时求导得 $s(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1,1)$.

高等数学（下）期末考试试卷（二）

试 题

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 函数 $z = x^2 + 2xy$ 的全微分 $\mathrm{d}z =$ ________.

2. 由函数取得极值的条件判断 $z = f(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 在 $(1,0)$ 点取得________值.

3. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$，当 p ________时级数发散.

4. 设 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x - x^2}\}$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为极坐标积分为________________.

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n - 3)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ _________.

6. 曲线 $x = t, y = 2t^2, z = t^3$ 在点 $(1,2,1)$ 的切线方程为____________________.

7. 交换积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x =$ ________________ .

8. 求两平面 $x - y - 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角_____________.

二、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

1. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 + 2$ 在点(1,1,4)的切平面及法线方程.

2. $z = \arctan(xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 设 $\mathrm{e}^z - xyz = 0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y = \sqrt{x}$，$y = x^2$ 所围成的闭区域.

5. 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域.

6. 求 $\int_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x$，其中 L 为抛物线 $x = y^2$ 上从起点 $O(0,0)$ 到终点 $A(1,1)$ 的有向曲线.

7. 利用高斯公式计算 $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在 $z = 0, z = 1$ 之间部分的外侧.

三、求解下列级数问题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 的收敛性.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

参 考 答 案

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. $2(x+y)\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y$

2. 极小

3. $p\leqslant 1$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

5. 3

6. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3}$

7. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$

8. $\frac{\pi}{3}$

二、计算题（每小题 8 分，共 56 分）

1. 解

$z=x^2+y^2+2$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为 $(2x,2y,-1)$，故在点 $(1,1,4)$ 的法向量为 $(2,2,-1)$.

故切平面方程为 $2(x-1)+2(y-1)-(z-4)=0$，法线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$.

2. 解

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+(xy)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1-(xy)^2}{[1+(xy)^2]^2}$.

3. 解

两端同时求 x 的导数得 $\mathrm{e}^z z_x-y(z+xz_x)=0$，化简得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zy}{\mathrm{e}^z-xy}$.

两端同时求 y 的导数得 $\mathrm{e}^z z_y-x(z+yz_y)=0$，化简得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zx}{\mathrm{e}^z-xy}$.

4. 解

积分区域 D 可表示为

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\right\},$$

于是 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}x\sqrt{y}\mathrm{d}y=\frac{6}{55}$.

5. 解

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{2}r^2\mathrm{d}z \quad （5 分）$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2r^3-r^5)\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}.$$

6. 解

$$\int_L(2x-y+4)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x-\sqrt{x}+4)\mathrm{d}x=\frac{13}{3}.$$

7. 解

加平面$\Sigma':z=1$，取上侧，由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)\mathrm{d}v=6\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=6\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot 1=2\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma'}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma'}3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}3(1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

原式$=2\pi-0=2\pi$.

三、求解下列级数问题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 解

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$，所以级数收敛.

2. 解

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$知收敛半径为$1$，当则$|x|=1$时，级数为交错级数，且满足莱布尼兹定理的条件，级数收敛，所以收敛域为$[-1,1]$.

令$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，求导得$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\dfrac{1}{1+x^2}$，所以

$\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$s(x)-s(0)=\arctan x$，而$s(0)=0$，故$s(x)=\arctan x$，$x\in[-1,1]$.

可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=s(1)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

参 考 文 献

[1] 同济大学数学系编. 高等数学习题全解指南（下册）. 北京：高等教育出版社，2007.
[2] 常桂娟等. 高等数学学习指导与习题解答（下册）. 北京：科学出版社，2014.